**5. Potenzreihenentwicklung einer Funktion, MacLaurin'sche Reihe, Taylorreihe**

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Funktion f in einer gewissen Umgebung von x = 0 beliebig oft differenzierbar ist. Ausserdem soll f eindeutig in eine Potenzreihe entwickelt werden können.

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ wobei $a_0 = f(0) = \frac{f(0)}{0!}$

Ist r der Konvergenzradius der Potenzreihe, dann konvergieren auch sämtliche durch gliedweise Differentiation gewonnenen Reihenentwicklungen.

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + 4 \cdot a_4 x^3 \dots$ $a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$

$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + \dots$ $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$

…

Die Koeffizienten sind damit durch den Funktionswert und alle Ableitungen an der Stelle 0 eindeutig bestimmt zu

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Die durch diese Koeffizienten festgelegte Potenzreihenentwicklung einer Funktion heisst Taylorreihe bzw. Mac Laurin-Reihe
(nach Colin Mac Laurin (1698 – 1746) und Brook Taylor (1685 – 1731)).

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

Bemerkungen:

a)
Nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion kann in eine MacLaurinsche Reihe entwickelt werden.

b)
Die Mac Laurinsche Reihe ist die Potenzreihenentwicklung von f um den Nullpunkt $x_0 = 0$ (bezeichnet als Entwicklungszentrum)  Sie ist ein Spezialfall für die Potenzreihe von Taylor mit einem Zentrum $x_0 \neq 0$.

c)
Wie der Konvergenzradius bestimmt werden kann, wird in einem späteren Abschnitt gezeigt.

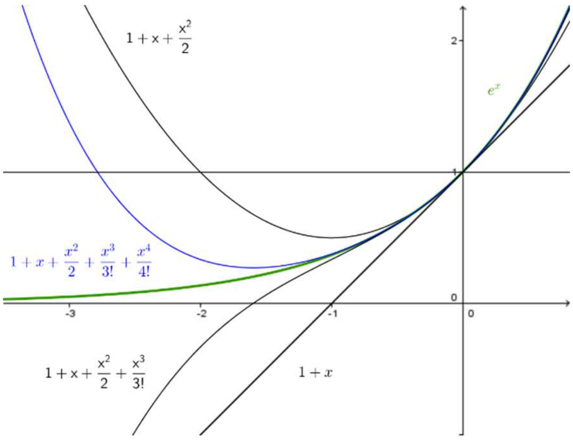
**Beispiele von Mac Laurinschen Reihen**

5.1 Die Exponentialreihe
Wegen $f^{(k)}(0) = k!a_k$ gilt für die
**Exponentialreihe**

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}$$

Konvergenzradius r = ∞

In der Skizze sind neben f auch die aus den n ersten Summanden bestehenden Näherungs-polynome dargestellt.




Da Potenzreihen summandenweise differenziert werden dürfen, ergibt sich erneut

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

Setzt man x = 1 so erhält man neu die folgende Darstellung der Eulerschen Zahl e:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Aus gegebenen Potenzreihen können durch Substitution weitere Reihen hergeleitet werden.

Übungsaufgabe:
a) Wie heisst die Potenzreihe für $e^{-x}$?

Lösung:
Ersetzt man die Variable x durch – x so erhält man die gesuchte Potenzreihe

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

Potenzreihen können auch addiert, subtrahiert und multipliziert werden:

b) Wie heissen die ersten Glieder der Mac Laurinreihe von $f(x) = x \cdot e^{-x}$?

Lösung:

$$f(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + - \cdots$$

## 5.2 Die Sinusreihe

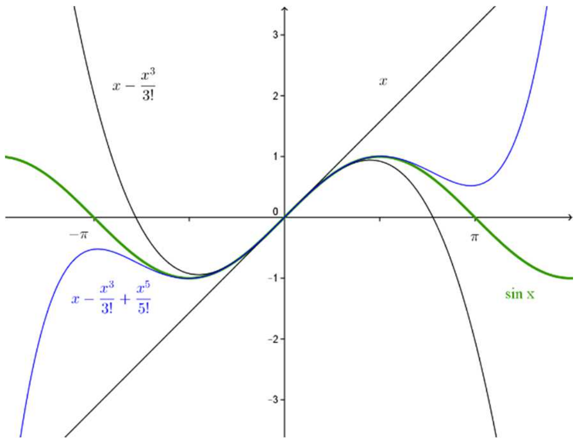
Wegen
$f^{(4k)}(0)=0 \quad f^{(4k+1)}(0)=1 \quad f^{(4k+2)}(0)=0 \quad f^{(4k+3)}(0)=-1$ erhält man die

**Sinusreihe**

$$\boxed{\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-....}$$

Konvergenzradius r = ∞

Da der Graph der Sinusfunktion zentral-symmetrisch zum Nullpunkt ist, kommen in der Potenzreihenentwicklung nur ungerade Exponenten vor.




Übungsaufgaben:
a) Wie heissen die ersten Glieder der Mac Laurinreihe von $f(x)=\sin(2x)$ ?
b) Die Mac Laurinsche Reihe von $\sin^2 x$ kann durch gliedweise Multiplikation der Sinusreihe mit sich selbst bestimmt werden.

Lösungen:
a)
Mac Laurinreihe von $f(x)=\sin(2x)$
Ersetzt man die Variable x durch 2x so erhält man

$$\sin(2x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}=2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^5}{15}-\frac{8x^7}{315}+-....$$

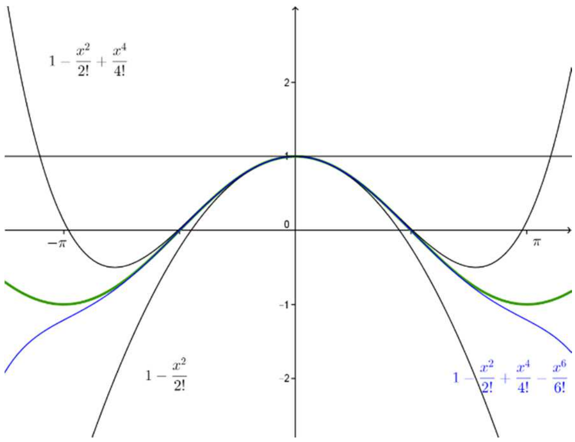
b)
$\sin^2 x = x^2-\tfrac{1}{3}x^4+\tfrac{2}{45}x^6-+...$ Konvergenzradius r = ∞

### 5.3 Die Cosinusreihe

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots}$$

Konvergenzradius r = ∞

Die Cosinusreihe kann auch als Ableitung der Sinusreihe durch gliedweises Differenzieren erhalten werden. Nun treten wegen der Axialsymmetrie des Cosinusgraphen zur y-Achse nur gerade Exponenten auf.




### Die Eulersche Relation

Setzt man die Reihen von $e^x$, sin x, cos x ins Komplexe fort, so ergibt sich:

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(i\varphi)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(i\varphi)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(i\varphi)^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\varphi^{2k} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\varphi^{2k+1} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Der Realteil (gerade Exponenten) ergibt also gerade die Cosinusreihe, der Imaginärteil (ungerade Exponenten) die Sinusreihe d.h. es gilt:

**$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$** speziell mit φ = π:

| | |
|---|---|
| **$e^{i\pi} = -1$** | **Eulersche Relation** |

oder auch

**ln(-1) = iπ**