7. Taylorpolynome, Lagrange'sche Restformel

Bricht man die Mac Laurinsche Reihe nach der n-ten Potenz ab, so erhält man ein Polynom vom Grade n, das in einer Umgebung des Nullpunkts näherungsweise das Verhalten der Funktion f beschreibt, da es mit f im Funktionswert und den ersten n Ableitungen übereinstimmt:

$$f_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + .. + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Wird speziell f durch eine lineare Funktion angenähert, so sagt man, man habe die Funktion f linearisiert. Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph der Funktion in einer Umgebung der Stelle 0 durch die Tangente ersetzt wird.

Fehlerabschätzung:
Der durch den Abbruch entstandene Fehler lässt sich mit der Lagrange'schen Restformel abschätzen

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$ **Lagrange'sche Restformel**

Das Restglied ergibt sich aus dem ersten vernachlässigten Summanden, indem man die Ableitung nicht an der Stelle 0, sondern an einer i.a. unbekannten Stelle ϑ x (0 < ϑ < 1) bildet.

Bemerkung:
Im Fall n = 0 ergibt sich gerade der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

7.1 Anwendungen der Restformel: Berechnung von Näherungswerten

a)
Näherungswert für die Eulersche Zahl e

Bricht man die Eulersche Reihe nach der n-ten Potenz ab, so erhält man für x = 1:

$$e^1 \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$$

Der dabei begangene Fehler ist nach Lagrange gegeben durch

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Dies führt für x =1 zu folgender Fehlerabschätzung

$$R_n(1) = \frac{e^{\vartheta}}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Für n = 5 erhält man 2.716667 (Fehler < $0.5 \cdot 10^{-2}$)

Soll die Eulersche Zahl auf 4 Stellen genau berechnet werden, dann ist n so zu wählen, dass

der Fehler $R_n(1) < 0.5\cdot 10^{-4}$ ist. Dies ist sicher erfüllt, wenn $\frac{3}{(n+1)!} < 0.5\cdot 10^{-4}$ gilt oder $(n+1)! > 60000$ woraus folgt n ≥ 8 und $e \approx 2.718279$.
Wie das folgende Beispiel zeigt, vereinfacht sich die Abschätzung bei alternierenden Reihen, denn der Betrag des Fehlers ist in diesem Fall kleiner als das erste nicht mehr berücksichtigte Glied der Taylorreihe:

b)
Berechnung von cos 8° auf 4 Dezimalstellen genau:

8° entspricht im Bogenmass 0.139626, damit gilt:

$$\cos 8° \approx 1 - \frac{0.139626^2}{2!} + \frac{0.139626^4}{4!}$$

Da der dritte Summand kleiner als $0.5\cdot 10^{-4}$ ist, erhält man cos 8° ≈ 0.9902 bereits bei Abbruch nach dem 2. Glied auf 4 Dezimalstellen genau.

Übungsaufgabe:
In welchem Bereich kann sin x durch x approximiert werden, wenn der absolute Betrag des relativen Fehlers kleiner als 10^{-3} sein soll?

Lösung:
Da der Fehler höchstens gleich dem ersten nicht mehr berücksichtigten Glied ist gilt für den relativen Fehler

$$\left|\frac{\sin x - x}{x}\right| \le \left|\frac{x^2}{6}\right| \le 10^{-3}$$

also $|x| < 0.077$ (Gradmass: 4.4°).

7.2 Einige Näherungen für wichtige Funktionen

Funktion	lineare Näherung	nächste Näherung
e^x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$
sin x	x	$x-\frac{x^3}{3!}$
cos x	1	$1-\frac{x^2}{2}$
$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{x}{2}$	$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$
$\ln(1+x)$	x	$x+\frac{x^2}{2}$
$\frac{1}{1-x}$	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$

Beispiel:
Mit der linearen Näherung der Logarithmusreihe ergibt sich die bereits im Grundkurs erwähnte Näherungsformel für die Verdopplungszeit bei p% und exponentiellem Wachstum:

Nach der Zinseszinsformel $k_n = k_0 r^n$ mit $r = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ gilt für die Verdopplungszeit

$k_n = k_0 r^n = 2k_0$ bzw. $r^n = 2$ oder $n = \frac{\ln 2}{\ln r} = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$

und wegen der Näherungsformel $\ln(1+x) \approx x$ mit $x = {}^{p}/_{100}$ für die Verdopplungszeit:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln r} = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \approx \frac{\ln 2}{\frac{p}{100}} = \frac{100 \ln 2}{p} \approx \frac{70}{p}$$

Übungsaufgaben:
a)
Gesucht ist ein Näherungswert $\sqrt{1.1}$ (Genauigkeit: 4 Stellen nach dem Dezimalpunkt).

Lösung:
Die Mac Laurin-Entwicklung für die ersten Glieder der Binomialreihe lautet:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Da der vierte Summand für x = 0.1 kleiner als 10^{-4} und die Reihe alternierend ist, ergibt sich der Näherungswert als Summe der ersten drei Summanden

$$\sqrt{1.1} \approx 1 + 0.05 - 0.00125 = 1.048755$$

mit einer geringen Abweichung in der vierten Dezimalstelle vom genauen Wert oder nach vier Summanden

$$\sqrt{1.1} \approx 1 + 0.05 - 0.00125 + 0.0000625 = 1.0488125$$

TR-Wert: 1.048808848….
b)
Für die Masse m eines Teilchens, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, gilt:

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

wobei m_0 die Ruhemasse des Teilchens bedeutet.
Gesucht ist eine einfache Näherungsformel für die relativistische Masse, sofern v relativ klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c ist.

Lösung:
Ersetzt man in der linearen Näherung der Binomialreihe $(1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ die Variable x durch $-\left(\frac{v}{c}\right)^2$, so erhält man

$$m = m_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx m_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\right) = m_0 \cdot \left(1 + \frac{v^2}{2 \cdot c^2}\right)$$