7.3 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden

Ein elementar nicht lösbares Integral kann gelöst werden, indem man den Integranden zunächst in eine Mac Laurinreihe entwickelt und die Reihe anschliessend gliedweise nach der Potenzregel integriert.

Bemerkung:
Die gliedweise Integration ist nur zulässig, wenn die Potenzreihe des Integranden im Integrationsintervall konvergiert. In diesem Fall konvergiert auch die durch summandenweise Integration entstandene Reihe.

Beispiele:
a)

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-+\cdots\right)dx = 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+-\cdots$$

$$= 1-0.055\,555+0.001\,666-0.000\,028+-\cdots$$

Da der letzte Summand kleiner als $0.5\cdot 10^{-4}$ und die Reihe alternierend ist, ergibt sich für das bestimmte Integral der auf vier Dezimalstellen genaue Wert

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = 0.9461\ldots$$

b)
Berechne den Inhalt der Fläche unter der Gauss'schen Glockenkurve im Intervall [0, 1] auf vier Dezimalstellen genau.
Setzt man in der Exponentialreihe $x=-\frac{z^2}{2}$ so erhält man

$$e^{-\frac{z^2}{2}} = 1-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z^2}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{z^2}{2}\right)^3+\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{z^2}{2}\right)^4-\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{z^2}{2}\right)^5+-\cdots$$

$$\int e^{-\frac{z^2}{2}}dz = z-\frac{z^3}{2\cdot 3}+\frac{z^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\frac{z^7}{6\cdot 8\cdot 7}+\frac{z^9}{24\cdot 16\cdot 9}-\frac{z^{11}}{120\cdot 32\cdot 11}+-\cdots$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 1-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5}-\frac{1}{6\cdot 8\cdot 7}+\frac{1}{24\cdot 16\cdot 9}-\frac{1}{120\cdot 32\cdot 11}+-\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}+\frac{1}{3456}-\frac{1}{42240}+-\cdots \approx 0.85562\ldots$$

Da die Reihe alternierend und der letzte Summand kleiner als $0.5\cdot 10^{-4}$ ist, stimmen vier Dezimalstellen. Wird dieser Wert noch durch $\sqrt{2\pi}$ dividiert, so ergibt sich wegen $\Phi(0)=\frac{1}{2}$ der folgende Näherungswert für $\Phi(1)$.

$$\Phi(1) = 0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^1 e^{-\frac{z^2}{2}}dz \approx 0.5+0.34134 \approx 0.8413$$

Dieser Wert stimmt mit dem Tabellenwert in der Formelsammlung der DMK überein.

Übungsaufgabe:
Gegeben ist das bestimmte Integral
a) $I = \int_0^1 t \cdot \sin(t^2)\, dt$
b) $I = \int_0^1 cos\sqrt{x}\, dx$
Berechne einen auf vier Dezimalstellen genauen Näherungswert für I durch Entwickeln des Integranden in eine Potenzreihe und vergleiche mit dem Wert, der sich mit einem Integrationsverfahren ergibt.
Lösungen:
a)

$$\sin(t^2) = t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - + \cdots$$

$$\mathrm{t} \cdot \sin(t^2) = t^3 - \frac{t^7}{3!} + \frac{t^{11}}{5!} - + \cdots$$

$$\int_0^1 \mathrm{t} \cdot \sin(t^2)\, dt = \int_0^1 \left(t^3 - \frac{t^7}{3!} + \frac{t^{11}}{5!} - + \cdots\right) dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^8}{8 \cdot 3!} + \frac{t^{12}}{12 \cdot 5!} - + \cdots\right]_0^1$$

$$\approx \frac{1}{4} - \frac{1}{8 \cdot 3!} + \frac{1}{12 \cdot 5!} \approx 0.22986$$

Integration durch Substitution

$$\int_0^1 \mathrm{t} \cdot \sin(t^2)\, dt = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 1) \approx 0.22985$$

b)

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + - \cdots$$

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx = x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} - \frac{x^4}{4 \cdot 6!} + - \cdots \approx 0.7635$$

Partielle Integration mit der Substitution $z = \sqrt{x}$

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx = 2\int_0^1 \mathrm{z} \cdot \cos z\, dz = 2 \cdot [z \cdot \sin z + \cos z]_0^1 \approx 0.7635$$