8. Beispiele von Anwendungen der Mac Laurin-Reihen

8.1 Barometrische Höhenformel

Aufgabe:
Zwischen dem Luftdruck p und der Höhe h in Meter bezüglich Meeresniveau besteht der Zusammenhang

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$$

Bis zu welcher Höhe h liefert die lineare Näherung

$$p(h) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{h}{7991}\right)$$

Werte, die maximal 1% vom tatsächlichen Luftdruck abweichen?

Lösung:
Berücksichtigt man in der Mac Laurinreihe der Exponentialfunktion

$$p(h) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{h}{7991} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{7991}\right)^2 - + \cdots\right)$$

nur die beiden ersten Glieder, so ergibt sich wie behauptet die lineare Näherung

$$p(h) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{h}{7991}\right)$$

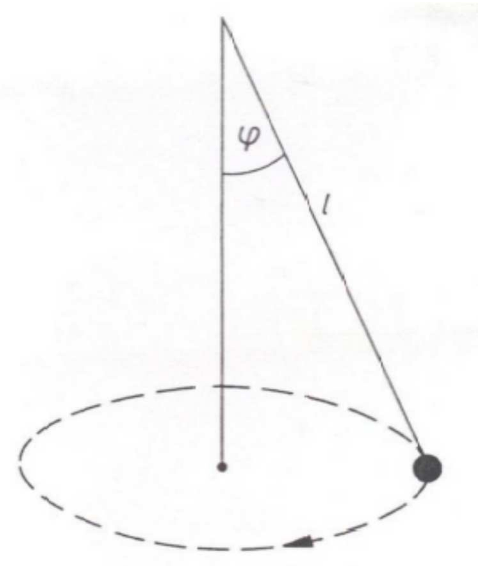
Der absolute Fehler ist höchstens gleich dem vernachlässigten quadratischen Glied. Wird für p(h) die lineare Näherung verwendet, dann gilt für den relativen Fehler:

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{7991}\right)^2}{1 - \frac{h}{7991}} \leq 0.01$$

Die maximale Höhe beträgt h ≈ 1050 Meter.

8.2 Konisches Pendel

Aufgabe:
Die Schwingungsdauer T eines konischen Pendels in der Abbildung hängt bei gegebener Fadenlänge l noch vom Winkel φ zwischen dem Faden und der Vertikalen ab und es gilt:



$$T = T(\varphi) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \cos\varphi}$$

Es ist zu zeigen, dass für kleine Winkel φ die Schwingungsdauer T nahezu winkelunabhängig ist.

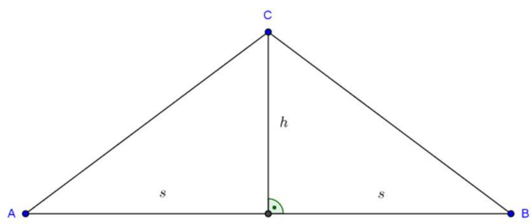
Lösung:
Wird die Mac Laurin-Entwicklung von $\cos\varphi$ nach dem konstanten Glied abgebrochen, so erhält man:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - +\cdots} \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Das Resultat entspricht der Schwingungsdauer des Fadenpendels (φ = 0°)

8.3 Umweg

Aufgabe:
Zwischen A und B mit der Entfernung AB = 2s bestehen die in der Abbildung angegebenen zwei Strassenverbindungen. Wie gross ist der Umweg U(h) über C gegenüber der direkten Verbindung von A nach B?



Wegen

$$\overline{AC} = \sqrt{s^2 + h^2} = s \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{s^2}}$$

und der linearen Näherung

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

gilt für den Umweg U:

$$U(h) = 2s \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{h^2}{s^2}} - 1 \right) \approx 2s \cdot \left(1 + \frac{h^2}{2s^2} - 1 \right) = \frac{h^2}{s}$$

Beispiel:
Für s = 50 km und h = 5 km ergibt sich der überraschend geringe Umweg 0.5 km.