

4. Eine Anwendung in der Kugelgeometrie

Aufgabe:

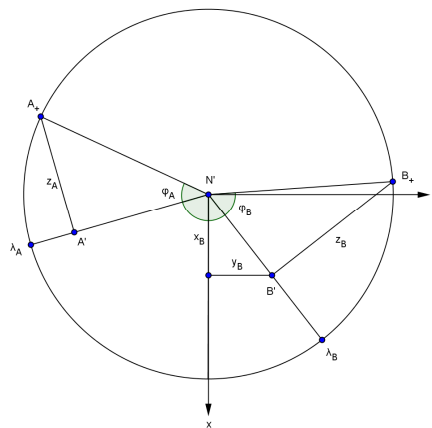
Gegeben sind zwei Punkte $A(\lambda_A, \varphi_A)$ und $B(\lambda_B, \varphi_B)$ der Erdoberfläche. Berechne ihre kürzeste Entfernung e .

Beispiel:

A: New York $\lambda_A = -74^\circ, \varphi_A = 41^\circ$

B: Moskau $\lambda_B = 38^\circ, \varphi_B = 56^\circ$.

Kürzeste Verbindungen (Geodätische) auf Kugeln sind Grosskreisbogen. Die kürzeste Entfernung e ist gleich der Länge des Grosskreisbogens zwischen A und B. In der Abbildung ist der Grundriss der Erdkugel mit Mittelpunkt N' und dem Erdradius 1 dargestellt. Die Meridiane von A und B erscheinen als Strecken. Klappt man sie in die Grundrissebene um, so kann der Grundriss der beiden Punkte A' und B' angegeben werden.



Damit können räumlichen Koordinaten des Punktes B angegeben werden:

$$N'B' = \cos \varphi_B$$

$$x_B = N'B' \cdot \cos \lambda_B = \cos \lambda_B \cdot \cos \varphi_B$$

$$y_B = N'B' \cdot \sin \lambda_B = \sin \lambda_B \cdot \cos \varphi_B$$

$$z_B = \sin \varphi_B$$

Die Koordinaten von A ergeben sich analog. Für die Komponenten der Ortsvektoren von B bzw. A gilt damit:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \cos \lambda_B \\ \cos \varphi_B \sin \lambda_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \cos \lambda_A \\ \cos \varphi_A \sin \lambda_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix}$$

Der kürzeste Abstand ist durch den Winkel ε bestimmt, den die Vektoren \vec{a} und \vec{b} einschliessen. Dieser kann mit dem Skalarprodukt bestimmt werden:

$$\cos \varepsilon = \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \varphi_A \cos \lambda_A \cos \varphi_B \cos \lambda_B + \cos \varphi_A \sin \lambda_A \cos \varphi_B \sin \lambda_B + \sin \varphi_A \sin \varphi_B$$

numerisches Beispiel:

$$\cos \varepsilon = 0.39 \quad \varepsilon = 1.17 \text{ (Erdradien)} \quad \text{Erdradius: } 6370 \text{ km}$$

$$\text{Gesuchte Entfernung: } e = 1.17 \cdot 6370 = 7506 \text{ km.}$$

Die Städte Madrid $M(\lambda_A = -3.6^\circ, \varphi_A = 41.0^\circ)$ und New York $N(\lambda_B = -74.0^\circ, \varphi_B = 41.0^\circ)$ haben ungefähr die gleiche geografische Breite. Ihre kürzeste Entfernung berechnet sich analog zu $e = 5730$ km. Für die Bogenlänge b des Breitenkreises erhält man die Distanz:

$$b = \frac{\Delta\lambda}{180^\circ} \cdot \pi r = \frac{\Delta\lambda}{180^\circ} \cdot \pi \cdot R \cdot \cos \varphi \approx 5910 \text{ km}$$

In der Skizze sind verschiedene Kleinkreise in die Grosskreisebene von Madrid und New York geklappt worden. Es ist zu erkennen, dass die Wege auf den Kleinkreisen länger als der Weg auf dem Grosskreisbogen sind.

