## 2. Orthogonalität

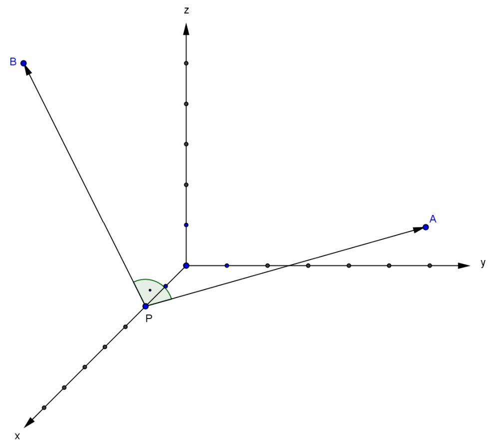
Setzt man fest, dass der Nullvektor auf jedem Vektor senkrecht steht dann gilt:

Satz:
Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen genau dann aufeinander senkrecht (sind orthogonal), wenn gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Aufgabe:
Gegeben: A(2, 3, -2), B(6, -1, 1)
Gesucht sind die Punkte P auf der x-Achse, für die das Dreieck APB bei P rechtwinklig ist!

Bedingung

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 2-x \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 - 8x + 7 = 0$$




Die quadratische Gleichung hat die Lösungen
$x_1 = 1$ und $x_2 = 7$
Die gesuchten Punkte $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(7, 0, 0)$ sind die Schnittpunkte der Thaleskugel über der Strecke AB mit der x-Achse.

Uebungsaufgabe:
Vom Rechteck ABCD kennt man die Endpunkte einer Diagonalen A(9, 6, 3) und C(-1, -6, 4).
Die Ecke B liegt auf der positiven x-Achse. Bestimme die fehlenden Eckpunkte B und D.

Lösung:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1-x \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9-x \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = x^2 - 8x - 33 = (x+3) \cdot (x-11) = 0$$

B(11, 0 ,0). Wegen $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gilt $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ und schleisslich D(-3, 0, 7)

Aufgabe:

Bestimme x bzw. z so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ z \end{pmatrix}$ ein Quadrat aufspannen.

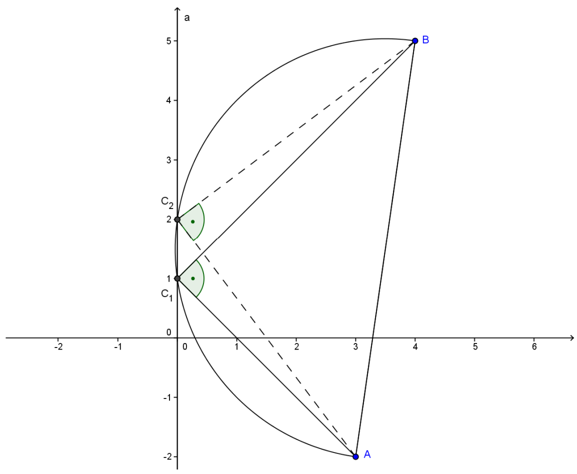
Die Bedingungen: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ und $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ führen auf das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} 2x - 12 + 6z = 0 \\ x^2 + 40 = z^2 + 40 \end{vmatrix}$$

mit den Lösungen: $x_1 = -3$ und $z_1 = 3$ bzw. $x_2 = z_2 = {}^3/_2$

**Senkrecht aufeinanderstehende Geraden in der Grundebene**

Aufgabe:
Gegeben sind die Punkte A(3,-2) und B(4,5).
Bestimme den Punkt C auf der y-Achse so,
dass das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist.




$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ y+2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -4 \\ y-5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = y^2 - 3y + 2 = (y-1)\cdot(y-2) = 0$

$y_1 = 1$, $y_2 = 2$

Die gesuchten Punkte C sind die Schnittpunkte des Thaleskreises über AB mit der y-Achse:
$C_1(0,1)$, $C_2(0,2)$

Aufgabe:

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimme die y-Komponente von $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ b_2 \end{pmatrix}$ so, dass $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ senkrecht steht.

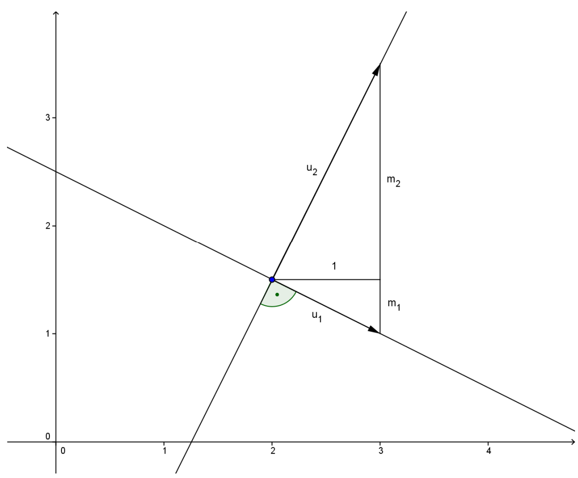
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 18 + 6b_2 = 0$ $\;$ $b_2 = -3$ $\;$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

allg.

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal.

Regel: Komponenten vertauschen, bei einer Komponente das Vorzeichen wechseln!

Aufgabe:
Welche Beziehung besteht zwischen den Steigungen m1 und m2 zweier Geraden g1 und g2, wenn g1 auf g2 aufeinander senkrecht stehen?



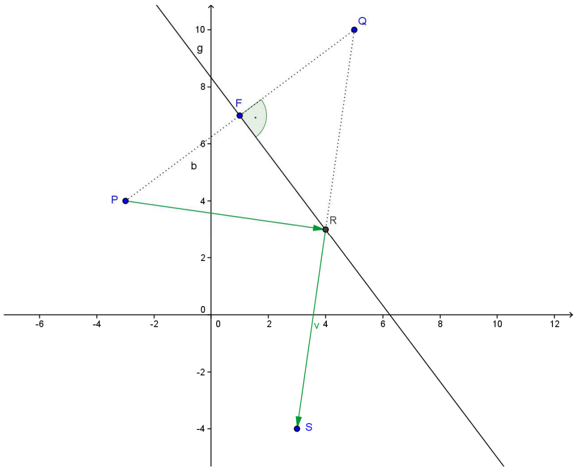

Richtungsvektor von $g_1$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor von g2: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$

Aus der Bedingung für Orthogonalität von $g_1$ und $g_2$: folgt:
$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 + m_1 \cdot m_2 = 0$

Satz:
Zwei nicht achsenparallele Geraden stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn für ihre Steigungen gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Aufgabe:
Fälle vom Punkt P(-3,4) das Lot auf die Gerade g: 4x + 3y - 25 = 0




Geradensteigung $m_1 = -{}^{4}/_{3}$
Steigung des Lots $m_2 = {}^{3}/_{4}$
Ansatz für das Lot: $y = \frac{3}{4}x + q$
q ist bestimmt durch die Eigenschaft,
dass P(-3,4) auf der Lotgeraden liegt
Gleichung der Lotgeraden:
l: $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ oder l: -3x + 4y - 25 = 0

Zusatzaufgabe:
Ein von P ausgehender Lichtstrahl soll nach Spiegelung an der Geraden g in den Punkt S(3,-4) reflektiert werden.

Lösungsidee:
Spiegle den Punkt P an der Geraden g nach Q.

Lotfusspunkt F: $\left| \begin{array}{l} 4x - 3y - 25 = 0 \\ -3x + 4y - 25 = 0 \end{array} \right|$

F(1,7)
F ist Mitte von PQ d.h. es gilt:

$\vec{f} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{p} + \vec{q})$ oder $\vec{q} = 2 \cdot \vec{f} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 14-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Spiegelpunkt Q(5,10)
Der Reflexionspunkt R ist der Schnittpunkt der Geraden QS mit der Geraden g.
Lösung: R(4,3)

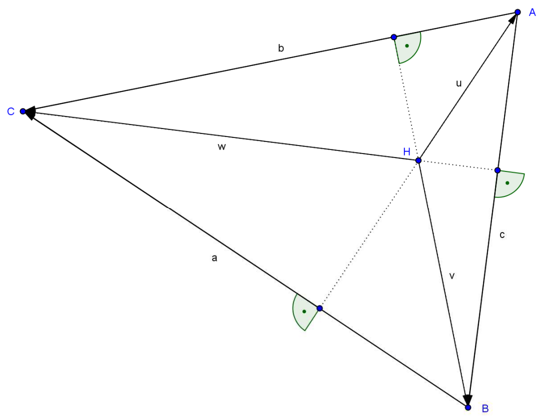
Uebungsaufgabe:
Bestimme den Höhenschnittpunkt H im Dreieck A(4,2) B(3,-6) C(-6,0)

Lösung : $h_a$: 3x - 2y - 8 = 0 $h_b$: 5x + y - 9 = 0
Höhenschnittpunkt H(2,-1)

**Beispiele von Beweisen mit dem Skalarprodukt:**

Satz:
Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

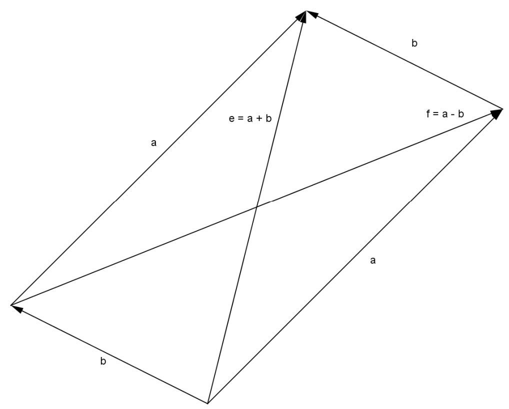
Beweis:
Sei H der Schnittpunkt der Höhen $h_a$ und $h_c$
d.h. es gilt:
$\vec{a}\cdot\vec{u}=0$ und $\vec{c}\cdot\vec{w}=0$
Zu zeigen ist nun, dass der Vektor $\vec{v}=\overrightarrow{HB}$ auf
$\vec{b}$ senkrecht steht.
Es gilt:
$\vec{a}=-\vec{v}+\vec{w}$ bzw. $\vec{w}=\vec{a}+\vec{v}$
$\vec{c}=-\vec{u}+\vec{v}$ bzw. $\vec{u}=\vec{v}-\vec{c}$
Nach Voraussetzung ist
$\vec{a}\cdot\vec{u}=\vec{a}\cdot\left(\vec{v}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{v}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ und
$\vec{c}\cdot\vec{w}=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}+\vec{v}\right)=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{v}=0$
Addiert man die beiden Seiten, so erhält man:
$\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{c}\cdot\vec{v}=\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\cdot\vec{v}=\vec{b}\cdot\vec{v}=0$ €




Satz:
Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rhombus, wenn seine Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Bem:
Im Rhombus sind die Diagonalen auch Winkelhalbierende.

Beweis:
Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht
$\Leftrightarrow \vec{e}\cdot\vec{f}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$
$\Leftrightarrow \vec{a}^2-\vec{b}^2=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=0$
$\Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$
$\Leftrightarrow$ Das Parallelogramm ist ein Rhombus.




Uebungsaufgabe:
Wie gross ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$), wenn gilt:
$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

Lösung: 90°