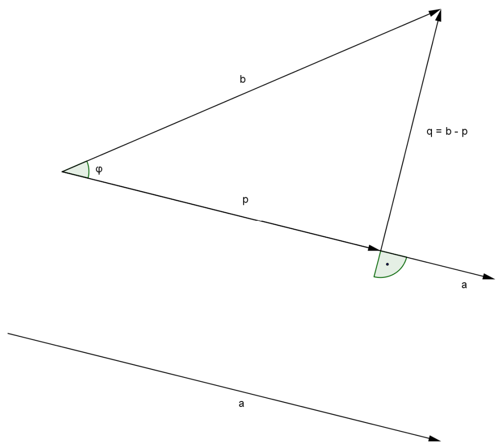
3. Normalprojektion eines Vektors

Für die Länge der Normalprojektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ gilt:

$|\vec{p}| = |\mathrm{b}| \cdot \cos\varphi$ falls φ spitz ist.

Mit der folgenden einfachen Umformung (dirty trick) kann dieser Term als Skalarprodukt aufgefasst werden:

$$|\vec{p}| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{a}^{\,0} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}^{\,0}$$



$\vec{a}^{\,0}$ ist der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$

Um die Komponenten des Projektions-vektors $\vec{p}$ zu erhalten, ist der Vektor $\vec{a}$ so zu strecken, dass er die geforderte Länge erhält :

$\vec{p} = (\vec{b} \cdot \vec{a}^{\,0}) \cdot \vec{a}^{\,0}$

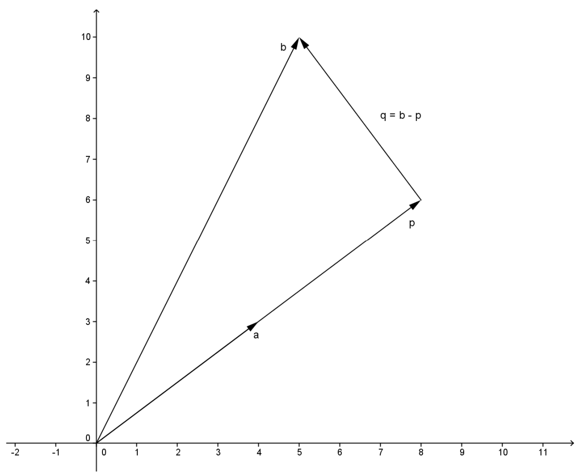
Kontrolle: Der Vektor $\vec{q} = \vec{b} - \vec{p}$ steht auf $\vec{a}$ senkrecht.

Bemerkung:
Die Aussage gilt auch, falls φ stumpf ist (in diesem Fall ist das Skalarprodukt negativ, der Projektionsvektor $\vec{p}$ ist zu $\vec{a}$ entgegengesetzt gerichtet.

B: Grundebene: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$|\vec{p}| = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}}{5} = 10 \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: Der Vektor $\vec{q} = \vec{b} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht auf $\vec{a}$ senkrecht.



B: Raum

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{p}| = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: $\vec{q} = \vec{b} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ steht auf $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht.

Herleitungsvariante:

Wählt man für den Projektionsvektor den Ansatz:

$\vec{p} = t \cdot \vec{a}$ t $\in$ R (1)

dann ist der Parameter t so zu bestimmen, dass gilt:

$\vec{q} \cdot \vec{a} = (\vec{b} - \vec{p}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{p} \cdot \vec{a} = 0$ woraus folgt:

$\vec{p} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (2)

Wegen (1) und (2) gilt:

$\vec{p} \cdot \vec{a} = (t \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = t \cdot \vec{a}^2 = t \cdot |\vec{a}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{a}$

und schliesslich:

$t = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$ und $\vec{p} = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{a}^0) \cdot \vec{a}^0$