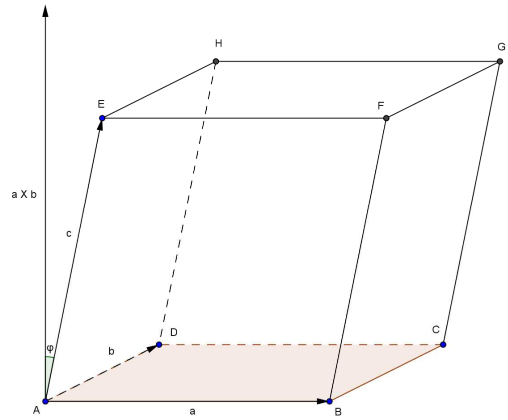
5. Das Spatprodukt

Drei von einem Punkt ausgehende nicht komplanare Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ spannen ein sogenanntes Spat (Parallelflach, Parallelepiped) auf. Ein Spat (→ Mineralogie: Kalkspat, Feldspat) wird also - als räumliches Gegenstück des Parallelogramms - von lauter Parallelogrammen begrenzt. Gesucht ist das Volumen dieses Spats.



Beh.
$V = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|$

Beweis:
Das Volumen V eines Spats berechnet sich aus der Grundfläche G und der Höhe h.
Bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ein Rechtssystem, dann ist die Höhe h die Normalprojektion des Vektors $\vec{c}$ in Richtung des Normalenvektors $\vec{a} \times \vec{b}$ zur Grundfläche, d.h. es gilt: $V = G \cdot h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cdot \cos\varphi = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ein Linkssystem, so ergibt sich das Volumen mit einem Minuszeichen, d.h. in beiden Fällen gilt die Behauptung.
Der Term $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ heisst Spatprodukt und wird mit $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bezeichnet. Es handelt sich um das Skalarprodukt zwischen dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ und dem Vektor $\vec{c}$.

B:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{Spatvolumen } V = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 36$$

Eigenschaften des Spatprodukts:

Das Spatprodukt gibt - vom Vorzeichen abgesehen - das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Spats an. Das Spatprodukt ist positiv oder negativ, je nachdem ob $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem oder Linksystem bilden. Das Spatprodukt ist 0, falls $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar d.h. linear abhängig sind.
Da bei der Vertauschung zweier Vektoren ein Rechtssystem in ein Linkssystem übergeht und umgekehrt, wechselt in diesem Fall das Spatprodukt das Vorzeichen. Bei zyklischer Permutation der drei Vektoren ändert das Vorzeichen des Spatprodukts hingegen nicht.

Die Berechnung des Spatprodukt kann gemäss den Definitionen des Vektorprodukts bzw. des Skalarprodukts berechnet werden:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (1)$$

6. Determinanten und ihre Eigenschaften

Es erweist sich als zweckmässig, das Spatprodukt als sogenannte dreigliedrige Determinante folgendermassen zu schreiben:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Die folgenden Eigenschaften von Determinanten erleichtern die Berechnung des Spatprodukts (ohne Beweis).

1. Ist eine Spalte der Nullvektor, so hat die Determinante den Wert 0.

2. Sind zwei Spalten kollinear d.h. linear abhängig, so hat die Determinante den Wert 0.

3. Vertauscht man zwei Spalten, so ändert die Determinante das Vorzeichen.

4. Man addiert zwei Determinanten, die sich nur in einer Spalte unterscheiden, indem man diese Spalten addiert und die andern unverändert lässt.

5. Man multipliziert eine Determinante mit einer Zahl, indem man eine Spalte mit dieser Zahl multipliziert.

6. Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer andern Spalte, so bleibt der Wert der Determinante unverändert.

7. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht. Deshalb bleiben die Sätze 1 bis 5 richtig, wenn man Spalte durch Zeile ersetzt.

8. Die Eigenschaft (1) heisst Entwicklung einer Determinante nach der 1. Spalte $\rightarrow$Verallgemeinerung Laplace'scher Entwicklungssatz in der Linearen Algebra.

7. Beispiele

$$\begin{vmatrix} 19 & 42 & 22 \\ 57 & 127 & 68 \\ 76 & 163 & 91 \end{vmatrix} \qquad \text{Faktor 19 abspalten}$$

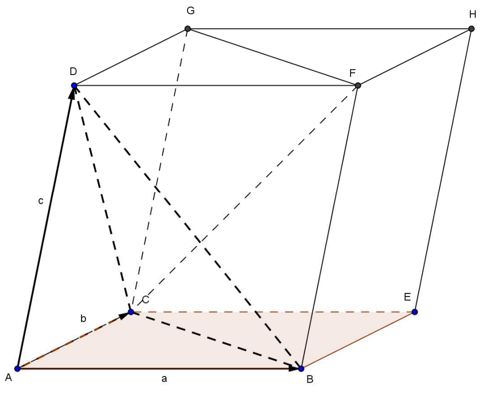
$$= 19 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 42 & 22 \\ 3 & 127 & 68 \\ 4 & 163 & 91 \end{vmatrix} \qquad \text{subtrahiere das 22-fache der 1. Spalte von der 3. Spalte}$$

$$= 19 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 42 & 0 \\ 3 & 127 & 2 \\ 4 & 163 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{subtrahiere das 42-fache der 1. Spalte von der 2. Spalte}$$

$$= 19 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{nach der 1. Zeile entwickeln}$$

$$= 19 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 19 \cdot 13 = 247$$

Aufgabe:
Berechne das Volumen eines Tetraeders.



Ergänzt man das Tetraeder zu einem Spat, so machen die Pyramiden ABCD, DFGC und BDFC zusammen das halbe Spatvolumen aus.
Die Pyramiden ABCD und DFGC sind volumengleich (kongruente Grundfläche ABC bzw. DFG und gleiche Höhe).
Die Pyramiden ABCD und BDFC sind volumengleich (kongruente Grundfläche ABD bzw. BDF und gleiche Spitze).
Damit gilt:

$$V = \tfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| \qquad \text{Volumen des Tetraeders ABCD}$$

B:
A(2, 1, 0) B(1, 1, 3), C(4, -2, 6) D(2, -3, 0)

$$V = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6}\left|-48\right| = 8 \qquad \text{Volumen des Tetraeders ABCD}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ bilden also ein Linkssystem und sie spannen ein Spat mit dem Volumen 48 auf. Das Tetraeder ABCD hat also das Volumen 8.

Uebungsaufgabe:
Volumen des Tetraeders A(2, 3, 3), B(4, -1, 4), C(1, 1, -2), D(5, 1, 0)

Lösung: $V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & -2 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 72 = 12$

Aufgabe:
Zeige, dass die vier Punkte A(5, 2, 1), B(-6, 3, -2), C(2, 5, 2) und D(0, 0, -2) auf einer Ebene liegen.
Wir zeigen dazu, dass das Spatprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 0 ist:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -11 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 77 - 14 - 63 = 0.$$

Ausblick:
Der Begriff der Determinante spielt in der sogenannten Linearen Algebra eine wichtige Rolle.
Eine Determinante mit n Zeilen und n Spalten besteht aus einer Summe von n! Summanden.
Die sogenannte Cramersche Regel ($\rightarrow$ Lineare Gleichungssysteme) ermöglicht es, die Lösung eines Linearen Gleichungssystems mit n Variablen und n Gleichungen als Quotienten von Determinanten zu schreiben.