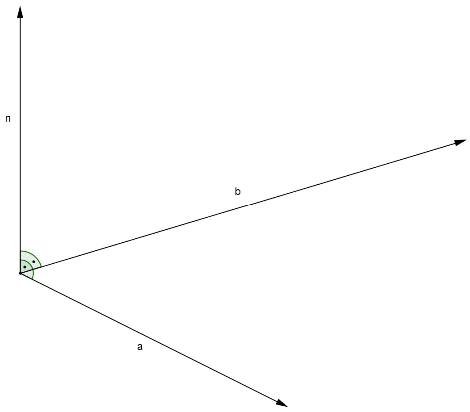
Vektorprodukt

1. Definition des Vektorprodukts

Im Unterschied zur Grundebene gibt es zu einer Geraden g im Raum durch einen Punkt P unendlich viele Normalen. Sie liegen in der Normalebene zu g durch P.
Auf das Vektorprodukt stösst man beim Problem, zu zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen gemeinsamen Normalenvektor $\vec{n}$ zu finden.



Einführendes Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ansatz: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Da $\vec{n}$ auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$ senkrecht steht, gilt für die Skalarprodukte von $\vec{n}$ mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$.
Damit erfüllen die Komponenten von $\vec{n}$ das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{matrix} 1 \cdot n_1 - 2 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 = 0 \\ 3 \cdot n_1 - 1 \cdot n_2 - 1 \cdot n_3 = 0 \end{matrix} \right|$$

Addition der beiden Gleichungen führt auf

$4n_1 - 3n_2 = 0$ bzw. $4 \cdot n_1 = n_2 \cdot 3$

Da der Vektor $\vec{n}$ durch die beiden Gleichungen nicht eindeutig bestimmt ist, kann eine der beiden Komponenten z.B. n_1 gewählt werden. Die Gleichung ist erfüllt, wenn auf beiden Seiten der Faktor 3 bzw. 4 vorkommt.
Die Wahl $n_1 = 3$ führt auf $n_2 = 4$. Setzt man diese beiden Werte in die 1. Gleichung ein, so ergibt sich $n_3 = 5$. Der gesuchte Normalenvektor ist damit:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Durchführung der Idee im allgemeinen Fall:

$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ $\quad a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = 0 \quad \big| \cdot(-b_1)$

$\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ $\quad b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3 = 0 \quad \big| \cdot\ a_1$

Ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten hat i.a. unendlich viele Lösungen (geometrische Interpretation: ein Normalenvektor kann durch ein beliebiges Vielfaches ersetzt werden). Nach Elimination von n_1 erhält man

$n_2 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) = n_3 \cdot (a_3b_1 - a_1b_3)$

Wir wählen $n_2 = a_3b_1 - a_1b_3$ $\quad n_3 = a_1b_2 - a_2b_1$ $\quad$ und erhalten durch Einsetzen
$n_1 = a_2b_3 - a_3b_2$

Der durch diese Komponenten eindeutig bestimmte Normalenvektor heisst Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Seine Komponenten lassen sich als Determinanten schreiben.

Def. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ $\qquad$ Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Probe!

Bem.:
Da leicht Vorzeichenfehler passieren, empfiehlt es sich, die Orthogonalität mit dem Skalarprodukt zu überprüfen.

Für die Berechnung der Komponenten kann man folgendes Schema verwenden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

Streicht man die erste Zeile so ergeben sich die Komponenten aus den folgenden drei Determinanten.

B:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Probe: $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

Damit sind folgende multiplikative Operationen erklärt:
$\rightarrow$ Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (zentrische Streckung eines Vektors) das Resultat ist ein Vektor.
$\rightarrow$ Skalarprodukt zweier Vektoren: Das Resultat ist eine reelle Zahl
$\rightarrow$ Vektorprodukt zweier Vektoren: Das Resultat ist ein Vektor.