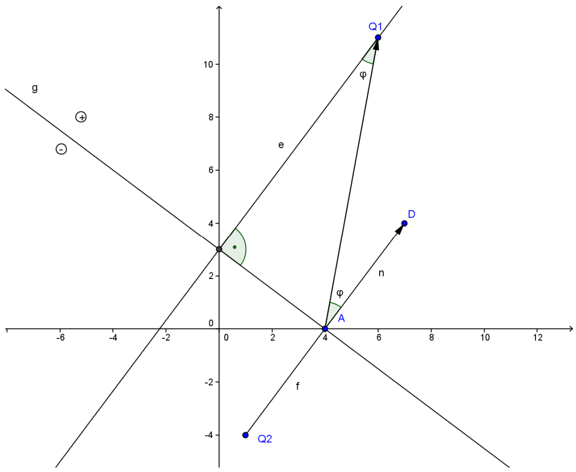
7.2 Kürzester Abstand e eines Punktes Q von einer Geraden g in der Grundebene



Skizze:
Q(6,11), g: 3x + 4y - 12 = 0, A(4,0)

Gegeben:
$Q(x_Q, y_Q)$ g: ax + by + c = 0

Ist $A(x_A, y_A)$ ein beliebiger Geradenpunkt, dann kann der Abstand e eines Punktes Q von der Geraden g als Normalprojektion des Vektors $\overrightarrow{AQ}$ bezüglich des Normalenvektors $\vec{n}$ aufgefasst werden.

$$e = \left|\overrightarrow{AQ}\right| \cdot \cos\varphi$$

e > 0 für $0 < \varphi < \pi/2$
e = 0 für $\varphi = \pi/2$
e < 0 für $\pi/2 < \varphi < \pi$.

Multipliziert man die rechte Seite der Gleichung mit $\frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}|}$, dann gilt gemäss Definition des Skalarprodukts :

$$e = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ}}{|\vec{n}|}$$

bzw. in Komponenten

$$e = \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_Q - x_A \\ y_Q - y_A \end{pmatrix}}{|\vec{n}|} = \frac{ax_Q + by_Q - (ax_A + by_A)}{|\vec{n}|} = \frac{ax_Q + by_Q + c}{|\vec{n}|}$$

Da A auf der Geraden liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichung
$ax_A + by_A + c = 0$ bzw. es gilt: $c = -(ax_A + by_A)$.

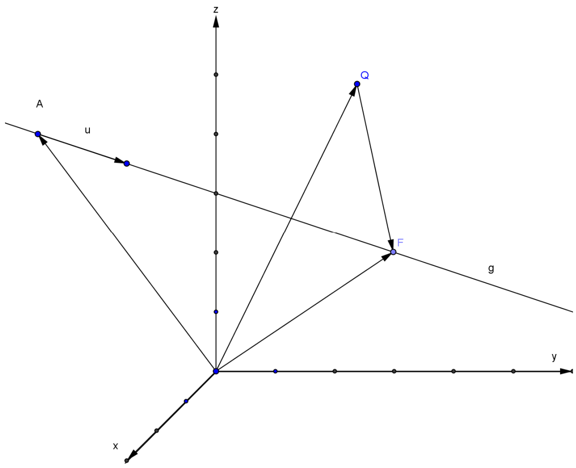
Satz:
Man erhält (vom Vorzeichen abgesehen) den Abstand eines Punktes Q von der Geraden g, indem man die Koordinaten von Q in die linke Seite der Geradengleichung einsetzt und durch den absoluten Betrag des Normalenvektors dividiert.

Beispiel:
Der Punkt $Q_1(6/11)$ hat von der Geraden g: 3x + 4y - 12 = 0 den Abstand e = 10
Der Punkt $Q_2(1/-4)$ hat von der Geraden g: 3x + 4y - 12 = 0 den Abstand e = -5
Die Gerade zerlegt die Grundebene in zwei Halbebenen. In der einen Halbebene ist e positiv, in der andern e negativ.

7.3 Kürzester Abstand e eines Punktes Q von einer Geraden g im Raum

1 Lösung mit dem Skalarprodukt

Idee:
Der Punkt F auf der Geraden g , der vom Punkt Q kürzesten Abstand hat, hat die Eigenschaft, dass derVerbindungsvektor $\overrightarrow{QF}$ und der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g einen rechten Winkel einschliessen, d.h. es gilt: $\overrightarrow{QF} \cdot \vec{u} = 0$.



Beispiel:

Q(1/-1/1)   g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Komponenten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 4t-5 \end{pmatrix}$ (*)

Aus $\overrightarrow{QF} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 4t-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ folgt t = 1 und damit F(3, 1, 0).

Wegen $\overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich der gesuchte Abstand zu $e = \left|\overrightarrow{QF}\right| = 3$.

2 Lösung als Extremalproblem

Der Parameter t ist so zu wählen, dass der Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{QF}$ (bzw. dessen Quadrat) minimale Länge hat. Bezeichnen wir das Quadrat des Abstands mit D(t), dann gilt wegen (*):

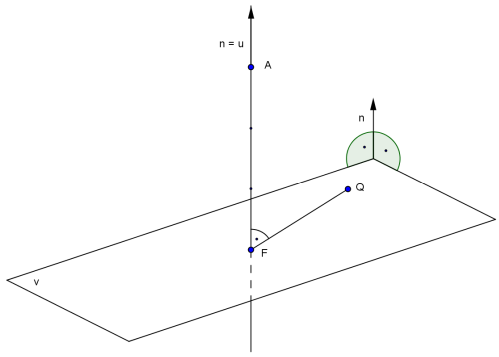
$$D(t) = \left|\overrightarrow{QF}\right|^2 = (1+t)^2 + (1+t)^2 + (4t-5)^2 = 18t^2 - 36t + 18 + 9 = 18 \cdot (t-1)^2 + 9$$

Der Graph der Funktion D ist eine nach oben geöffnete Parabel, deren Scheitel an der Stelle t = 1 liegt. Das minimale Abstandsquadrat D(1) = 9 liefert den kürzesten Abstand e = 3. Setzt man t = 1 in die Geradengleichung ein, so ergibt sich erneut der Lotpunktpunkt F(3, 1, 0).

Das Minimum kann auch mit den Methoden der Differentialrechnung bestimmt werden:
D'(t) = 12t - 12 = 0 für t = 1.

3 Lösung mit der Normalebene

Zu einer gegebenen Geraden g und einem Punkt Q gibt es unendlich viele Geraden, die auf g senkrecht stehen. Sie liegen in einer Ebene ν zu g durch Q. ν heisst Normal-ebene zu g durch Q. Der gesuchte Punkt F ist der Schnittpunkt dieser Normalebene ν mit g.



Der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g ist ein Normalenvektor der Ebene ν

B:

Q(1, -1, 1) g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von ν

Ansatz für ν: $x + y + 4z + d = 0$
$Q \in \nu$: $x + y + 4z - 4 = 0$

ν mit g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ schneiden

$(2 + t) + t + 4(-4 + 4t) - 4 = 0$ $18t - 18 = 0$ $t = 1$ F(3, 1, 0)

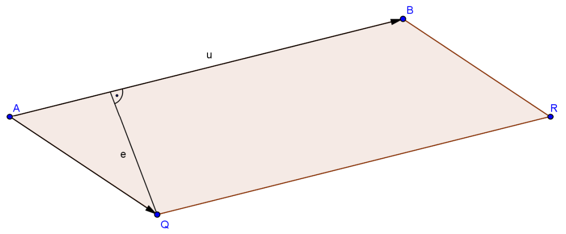
$\overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ kürzester Abstand e = 3.

Übungsaufgabe:
Vom gleichschenkligen und bei C rechtwinkligen Dreieck ABC kennt man den Eckpunkt A(3, -3, 4). Die Seite BC liegt auf der Geraden g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme dien fehlenden Eckpunkte B und C des Dreiecks.

Lösung:
ν: $2x - y + 2z - 17 = 0$, mit g schneiden C(7, 1, 2), B_1(3, 3, -2) B_2(11, -1 6)

4 Lösung mit dem Vektorprodukt

Verschiebt man den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g parallel durch den Punkt Q, so entsteht ein Parallelogramm ABRQ. Der Inhalt I dieses Parallelogramms kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:



elementar: $I = e \cdot |\vec{u}|$

mit dem Vektorprodukt: $I = \left|\vec{u} \times \overrightarrow{AQ}\right|$

Gleichsetzen $I = e \cdot |\vec{u}| = \left|\vec{u} \times \overrightarrow{AQ}\right|$

und damit

$$e = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AQ}\right|}{|\vec{u}|}$$

kürzester Abstand des Punktes Q von der Geraden g (Startpunkt A, Richtungsvektor $\vec{u}$ **)**

B:

Q(1, -1, 1) g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$e = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{18}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{18}} = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 3$$

Bem.:
Diese Variante liefert die Koordinaten des Punktes F nicht direkt.

Beispiele für mögliche Einkleidungen dieser Grundaufgabe:

- Von einer Kugel kennt man den Kugelmittelpunkt Q und eine Kugeltangente g. Bestimme den Kugelradius r.
- Von einem Drehzylinder mit Achse g kennt man die Achse g und einen Zylinderpunkt Q. Bestimme den Radius des Drehzylinders.