

## 8 Ortsaufgaben:

### 8.1: Mittelnormalebene

Die Punkte des Raumes, die von zwei gegebenen Punkten A und B gleichen Abstand haben, liegen in einer Ebene mit dem Normalenvektor  $\overrightarrow{AB}$ , die durch den Mittelpunkt Z der Strecke AB geht. Diese Ebene heisst Mittelnormalebene der Strecke AB (als Gegenstück zur Mittelsenkrechten in der Grundebene).

Aufgabe:

Von einer Kugel mit Mittelpunkt M auf der y-Achse kennt man die Punkte A(1, 2, 3) und B(3, 6, -5)

Der Kugelmittelpunkt M liegt in der Mittelnormalebene  $\mu$  der Strecke AB.

Koordinaten des Mittelpunkts Z der Strecke AB:

$$\vec{z} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Z(2, 4, -1)$$

Normalenvektor der  $\mu$ :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ansatz  $\mu$ :  $x + 2y - 4z + d = 0$

$Z(2, 4, -1) \in \mu$  ergibt  $d = -14$

$\mu$ :  $x + 2y - 4z - 14 = 0$

Da M auf der y-Achse liegt gilt wegen  $x = z = 0$   $2y - 14 = 0$

Gesuchter Mittelpunkt M(0, 7, 0)

$$\text{Kugelradius } r = |\overrightarrow{AM}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{35}$$

Lösungsvariante:

Der gesuchte Kugelmittelpunkt M(0, y, 0) erfüllt die Bedingung:

$$|\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{BM}|^2$$

Übungsaufgaben:

a)

Vom gleichschenkligen Dreieck ABC kennt man die Basis A(-6, 9, 5) B(2, 1, 1). Die Ecke C liegt auf der Geraden g durch die Punkte P(-3, 11, 13) und Q(7, 6, 3).

Lösung:

C liegt in der Mittelnormalebene von AB und auf der Geraden g:

$$\mu: 2x - 2y - z + 17 = 0 \quad C(3, 8, 7)$$

b)

Bestimme den Mittelpunkt M und den Radius r einer Kugel, welche durch den Punkt P(7, 3, 9) geht und die Ebene  $\epsilon: 2x - y - 2z + 25 = 0$  im Punkt Q(-3, 5,  $z_Q$ ) berührt.

Tip:

M liegt

- in der Mittelnormalebene von P und Q
- auf dem Lot zu  $\epsilon$  durch Q

Lösung: M(3, 2, 1) r = 9

## 8.2: Winkelhalbierende Ebenen, Mittelparallelebene

Wir betrachten zwei sich schneidende Ebenen

$$\varepsilon_1: \vec{n}_1 \cdot \vec{r} - d_1 = 0 \text{ und } \varepsilon_2: \vec{n}_2 \cdot \vec{r} - d_2 = 0 \text{ mit}$$

$$|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1$$

und fragen nach der Menge der Punkte Q des Raumes, die von den beiden Ebenen gleichen Abstand haben.

Nach der Hesse'schen Abstandsformel bedeutet dies, dass für den Ortsvektor  $\vec{r}$  von Q gilt:

$$|\vec{n}_1 \cdot \vec{r} - d_1| = |\vec{n}_2 \cdot \vec{r} - d_2|$$

Die Gleichheit der Beträge bedeutet, dass die Terme gleich oder entgegengesetzt gleich sind:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{r} - d_1 = \vec{n}_2 \cdot \vec{r} - d_2 \quad \text{oder}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{r} - d_1 = -(\vec{n}_2 \cdot \vec{r} - d_2) \quad \text{bzw. kurz:}$$

$$(\vec{n}_1 \pm \vec{n}_2) \cdot \vec{r} = d_1 \pm d_2$$

d.h. die gesuchten Punkte liegen in zwei Ebenen, den sogenannten winkelhalbierenden Ebenen von  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Man erhält ihre Gleichungen, indem man die Gleichungen der gegebenen Ebenen addiert bzw. subtrahiert (sofern die beiden Normalenvektoren Einheitsvektoren sind).

Illustration an einem Beispiel:

$$\varepsilon_1: x - 2y + 2z - 3 = 0$$

$$\varepsilon_2: x + 4y - 8z + 5 = 0$$

$$\frac{x - 2y + 2z - 3}{3} = \pm \frac{x + 4y - 8z + 5}{9}$$

$$\omega_1: x - 5y + 7z - 7 = 0 \text{ bzw. } \omega_2: 2x - y - z - 2 = 0.$$

Beachte:

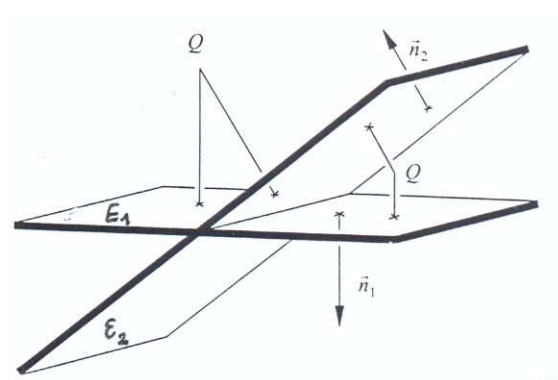
Die beiden Ebenen stehen senkrecht aufeinander, denn:

$$(\vec{n}_1 + \vec{n}_2) \cdot (\vec{n}_1 - \vec{n}_2) = \vec{n}_1^2 - \vec{n}_2^2 = 0$$

$$\text{Kontrolle: } \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Bem.:

Die winkelhalbierenden Ebenen sind das Gegenstück zu den Winkelhalbierenden zweier Geraden in der Grundebene.



Die analoge Überlegung für zwei parallele Ebenen führt auf die sogenannte Mittelparallelebene.

B:

$$\varepsilon_1: 3x - 2y + 6z - 19 = 0$$

$$\varepsilon_2: 3x - 2y + 6z + 9 = 0$$

Die Ortsbedingung für die Mittelparallelebene:

$$3x - 2y + 6z - 19 = -(3x - 2y + 6z + 9)$$

führt auf die Gleichung der Mittelparallelebene:  $3x - 2y + 6z - 5 = 0$ .

Aufgabe:

Bestimme den Mittelpunkt M und den Radius einer Kugel k mit den folgenden Eigenschaften:

- k berührt die xy-Ebene
- k berührt die Ebene  $\tau: x + 2y + 2z - 30 = 0$  im Punkt T(2, 4, 10).

Der Mittelpunkt liegt in den beiden winkelhalbierenden Ebenen mit den Gleichungen:

$$\pm z = \frac{x + 2y + 2z - 30}{3}$$

$$\omega_1: x + 2y - z - 30 = 0$$

$$\omega_2: x + 2y + 5z - 30 = 0$$

und auf dem Lot l in T auf  $\tau$ :

$$l: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das Lot l schneidet die winkelhalbierenden Ebenen in den beiden gesuchten Mittelpunkten

1. Lösung:  $M_1(0, 0, 6)$  und  $r_1 = 6$

2. Lösung:  $M_2(12, 24, 30)$  und  $r_2 = 30$ .

Variante des Lösungswegs:

Für die z-Koordinate eines Punktes auf dem Lot l gilt:  $z = 10 + 2t$

Der Kugelradius r bzw. dessen Quadrat  $r^2$  kann auf zwei Arten berechnet werden:

Da k die xy-Ebene berührt, ist

$$z^2 = (10 + 2t)^2 \quad (1)$$

Von T aus erreicht man den gesuchten Mittelpunkt indem man eine Strecke der Länge r abträgt. Für den Abstand des Punktes M von T gilt damit

$$(3|t|)^2 = 9t^2 = (10 + 2t)^2 \quad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt:

$3t = 10 + 2t$  oder  $-3t = 10 + 2t$  oder also  $t_1 = 10$  bzw.  $t_2 = -2$  mit den bereits bekannten Lösungen.

Die folgenden mit (\*) bezeichneten Aufgaben sind etwas aufwändiger:

Aufgabe (\*):

Eine Pyramide hat die Grundfläche  $A(-12, 0, -2)$   $B(12, -12, -2)$   $C(0, 12, -2)$  und die Spitze  $S(-4, 4, 6)$ . Berechne die Koordinaten des Zentrums und den Radius der Inkugel.

Vorbemerkung:

Bei der Bestimmung des Abstands nach Hesse ist zu beachten, dass sich - je nach Lage des Punktes in den zwei Halbräumen - der Abstand mit positivem oder negativem Vorzeichen ergibt.

Ebene ABC:  $z + 2 = 0$

S liegt auf der "positiven" Seite der Ebene

Ebene ABS:  $x + 2y - 2z + 8 = 0$

C liegt auf der "positiven" Seite der Ebene

"innere" winkelhalbierende Ebene:

$3z + 6 = x + 2y - 2z + 8$  bzw.

$x + 2y - 5z + 2 = 0$

Ebene ABC:  $z + 2 = 0$

Ebene ACS:  $2x - 2y - z + 22 = 0$

"innere" winkelhalbierende Ebene:

$x - y - 2z + 8 = 0$

Ebene ABC:  $z + 2 = 0$

Ebene BCS:  $2x + y + 2z - 8 = 0$

"innere" winkelhalbierende Ebene:

$2x + y + 5z - 2 = 0$

A liegt auf der „negativen“ Seite von BCS.

Die Schnittgerade der beiden ersten winkelhalbierenden Ebenen

$s: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  schneidet die dritte winkelhalbierende Ebene im Punkt  $M(-3/3/1)$

Ergebnis:

Mittelpunkt der Inkugel  $M(-3, 3, 1)$  Radius  $r = 3$  als Abstand des Mittelpunkts M von der Ebene ABC.

Übungsaufgabe:

Gegeben ist die abgebildete Pyramide ABCD.

Gesucht sind Mittelpunkt und Radius ihrer Inkugel.

Lösung:

Gleichung der Ebene ABD:

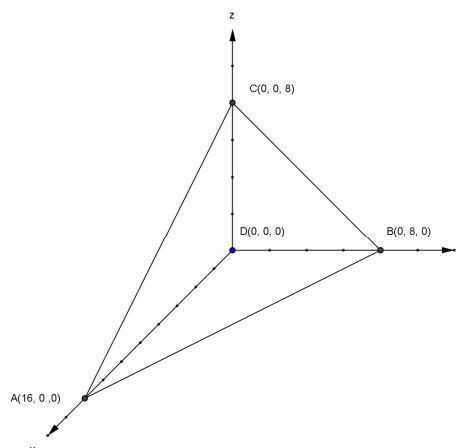
$\tau: x + 2y + 2z - 16 = 0$

Da die Kugel die drei Koordinatenebenen berührt, haben die Koordinaten des Kugelmittelpunkts die spezielle Form  $M(r, r, r)$ .

Der Abstand von M zu  $\tau$  muss mit r übereinstimmen:

$r = -\frac{r + 2r + 2r - 16}{3}$  mit der Lösung

$M(2, 2, 2), r = 2$



Bem.:

Das Minuszeichen ergibt sich, da M auf der negativen Seite von  $\tau$  liegt.