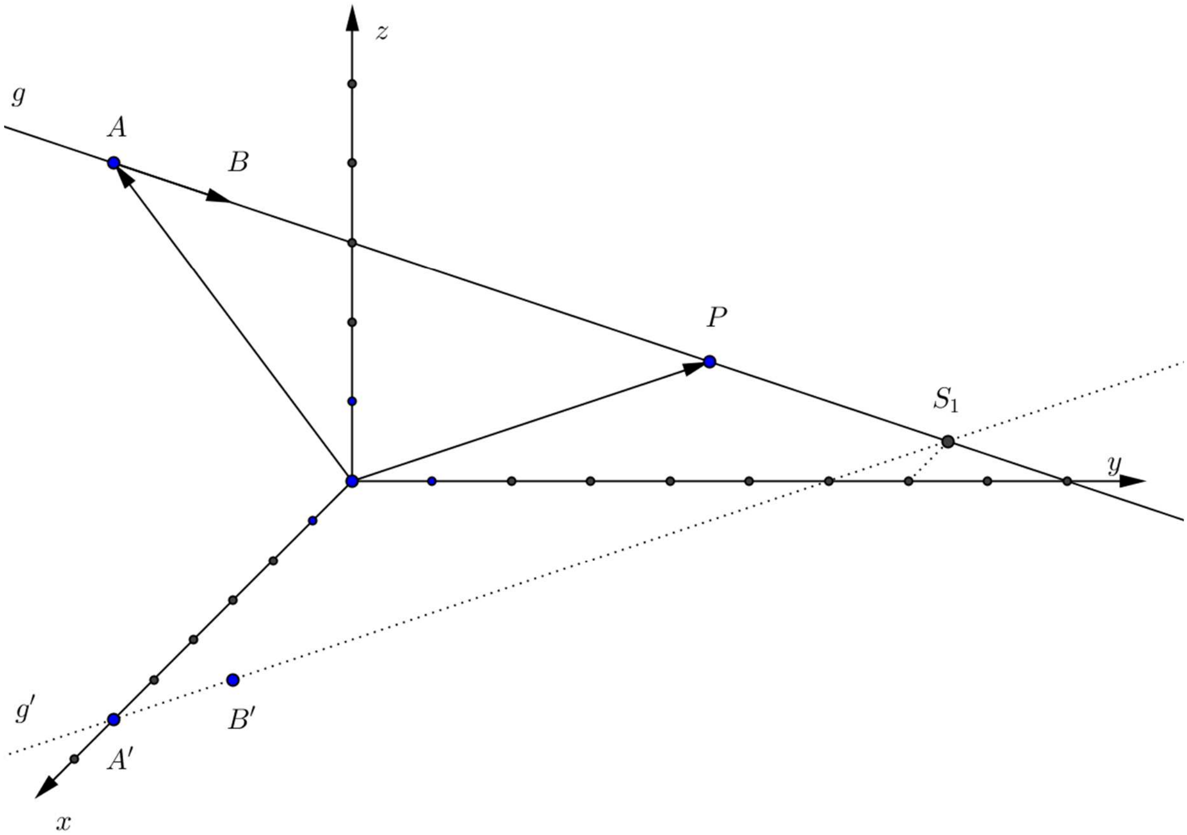
3. Darstellung der Geraden im Raum

3.1. Parametergleichung der Geraden

Die naheliegende Vermutung, dass eine Gerade des Raumes durch eine Gleichung der Form ax + by + cz +d = 0 beschrieben werden kann ist falsch (siehe Koordinatengleichung der Ebene).



In der Skizze ist die Gerade g durch die Punkte A(6,0,7) und B(5,1,6) und ihr Grundriss g' im Schrägriss dargestellt.
Eine Gerade im Raum kann durch einen Punkt A mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{a}$ und einen Richtungsvektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ (oder durch zwei Punkte A und B) festgelegt werden. Ist P ein beliebiger Geradenpunkt, dann ist $\overrightarrow{AP}$ ein geeignetes Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{u}$ d.h. es gilt: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{u}$ mit t ∈ R (Skizze: t = 5).
Für den Ortsvektor $\vec{r}$ eines beliebigen Geradenpunkts gilt damit:

$\vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$
Parametergleichung der Geraden durch den Punkt A mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$
t ∈ R heisst Parameter

Setzt man für t eine reelle Zahl ein, so erhält man den Ortsvektor nach einem Geradenpunkt P (d.h. die Koordinaten des Punktes P) und umgekehrt gehört zu jedem Geradenpunkt ein geeigneter Wert des Parameters t.

Die Parametergleichung beschreibt die Bewegung eines Massenpunktes, der zur Zeit t = 0 in A startet und sich mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ gleichförmig bewegt. $|t|$ misst den Abstand des Massenpunkts vom Startpunkt A in Einheiten von $|\vec{u}|$.

Bem:
Der Startpunkt A kann durch einen andern Geradenpunkt, der Richtungsvektor $\vec{u}$ durch ein Vielfaches ersetzt werden (Interpretation: Dies entspricht einer Änderung des Startpunkts bzw. der Geschwindigkeit).

Aufgabe:
Bestimme rechnerisch (und konstruktiv) die Schnittpunkte der oben skizzierten Geraden mit den Bildebenen.

Parametergleichung von g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

In der xy-Ebene ist z = 7 - t = 0 also gilt: t = 7
Setzt man den Parameterwert in die Parametergleichung ein, so erhält man die Koordinaten des Schnittpunkts S_1(-1, 7, 0). Konstruktiv ergibt sich S_1 dort, wo sich die Gerade g und ihr Grundriss g' schneiden.

Bem.:
Die Durchstosspunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen (xy-Ebene, yz-Ebene, xz-Ebene) heissen Spurpunkte.

Analog ergeben sich die weiteren Schnittpunkte mit der yz-Ebene S_2(0, 6, 1)
bzw. mit der xz-Ebene S_3(6, 0, 7)

Zusatzfrage:
Welche Koordinaten hat der Geradenpunkt Q mit der z-Koordinate 10?

Wegen z = 7 - t = 10 ist t = -3. Koordinaten des gesuchten Punkts lauten damit Q(9, -3, 10).

Durch **eine** Koordinate ist also der Wert des Parameters t festgelegt. Damit sind auch die beiden andern Koordinaten bestimmt.

Übungsaufgabe:
Bestimme eine Parametergleichung
a) der Koordinatenachsen
b) einer Parallelen zu z-Achse durch den Punkt A(1, 2, 3)
c) einer Parallelen zur Geraden g: y = 2x in der xy-Ebene, welche durch den Punkt A(1, 2, 3) geht

Aufgabe:
Eine Ameise bewegt sich geradlinig-gleichförmig. Sie startet zur Zeit t = 0 in P_0(5, 1, 6) und befindet sich zur Zeit t = 1 in P_1(4, 2, 5).
a) Wo befindet sich die Ameise nach 4 Sekunden?
b) Nach welcher Zeit und wo erreicht die Ameise die xy-Ebene?
c) Wo befindet sich die Ameise , wenn sie eine Strecke der Länge $\sqrt{27}$ zurückgelegt hat?

„Fahrplan“ der Ameise: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a)
t = 4 P_4 (1, 5, 2)
b)
in der xy-Ebene ist z = 6 – t = 0 oder t = 6 (P_6 (1, 1, 0)
c)
Die Ameise legt in der Zeiteinheit $|\vec{u}| = \sqrt{3}$ zurück. Um eine Strecke der Länge $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ zurückzulegen, benötigt sie 3 Sekunden. Sie befindet sich dann in P_3 (2, 4, 3).

Aufgabe:
Untersuche, ob die Punkte P(17,-9, 9) bzw. Q(12, -1, 6) auf der Geraden g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ liegen.
Gesucht ist ein Parameterwert t, der das folgende (überbestimmte) Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{vmatrix} 17 & = & 2+5t \\ -9 & = & 3-4t \\ 9 & = & 3t \end{vmatrix}$$

Dies ist für t = 3 der Fall. Damit liegt P auf g.

Das 2. Beispiel führt auf das folgende überbestimmte Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} 12 & = & 2+5t \\ -1 & = & 3-4t \\ 6 & = & 3t \end{vmatrix}$$

Der aus der 3. Gleichung ermittelte Parameterwert t = 2 erfüllt zwar die 1. Gleichung, nicht aber die 2. Damit liegt Q nicht auf g (hingegen Q*(12, -5, 6) mit "angepasster" y-Koordinate).

Übungsaufgabe:
Suche auf der Geraden durch die Punkte A(4, 3, 2) und B(6, -3, 5)
a) den Schnittpunkt mit der yz-Ebene
b) den Punkt H, der von A den Abstand 28 hat
c) Suche auf der x-Achse den Punkt P so, dass das Dreieck PAB bei A rechtwinklig ist

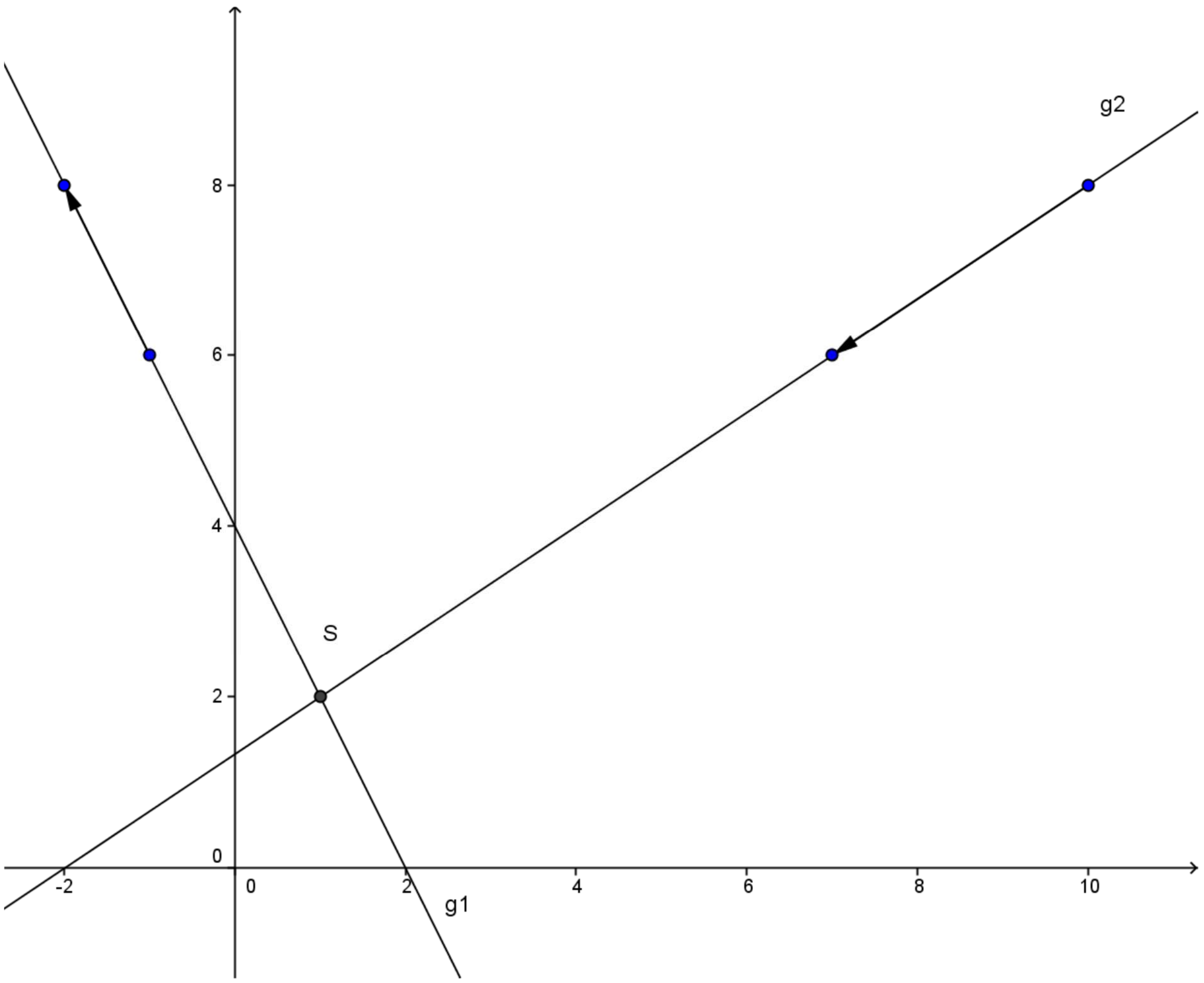
Lösung a) G(0, 15, -4) b) H_1 (12, -21, 14), H_2 (-4, 27, -10) c) P(-2, 0, 0)

3.2 Gegenseitige Lage von Geraden

Zur Vorbereitung ein Beispiel in der Grundebene:

Aufgabe:
Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden g_1 und g_2

g_1: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ g_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$



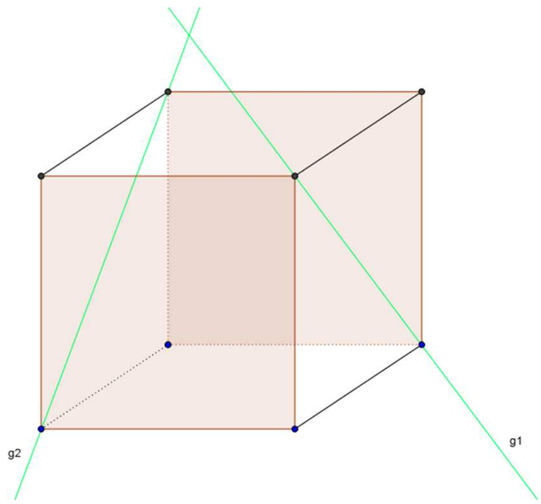
Im Schnittpunkt stimmen die entsprechenden Komponenten überein:
x: $\quad -1 - t_1 = 10 - 3t_2$
y: $\quad 6 + 2t_1 = 8 - 2t_2$
Die Lösung des Gleichungssystems $t_1 = -2$ und $t_2 = 3$ liefert den Schnittpunkt S(1,2).

In der Grundebene sind zwei weitere Fälle möglich:
1. Die Geraden sind echt parallel
2. Die Geraden fallen zusammen.

Bezüglich der gegenseitigen Lage zweier Geraden können im Raum die folgenden 4 Fälle auftreten. Sie können in einem Würfel mit Geraden illustriert werden, die durch die Kanten oder Flächendiagonalen bestimmt sind. Speziell ist in der Skizze der Fall windschiefer Geraden dargestellt.

1. Die Richtungsvektoren sind parallel (linear abhängig):
1.1
Liegt der Anfangspunkt von g_1 nicht auf g_2,
dann sind **g_1 und g_2 echt parallel**
1.2
Liegt der Anfangspunkt von g_1 auf g_2,
dann **fallen g_1 und g_2 zusammen**

2. Die Richtungsvektoren sind nicht parallel (linear unabhängig):
2.1
Haben g_1 und g_2 einen Punkt gemeinsam,
dann **schneiden sich g_1 und g_2**
2.2
Haben g_1 und g_2 keinen Punkt gemeinsam,
dann sind **g_1 und g_2 windschief**
(vgl. die Skizze)



Beispiele

zu 2.1: **g_1 und g_2 schneiden sich**

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der 2. Geraden ist kein Vielfaches des Richtungsvektors der 1. Geraden (die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig). Damit sind die Geraden nicht parallel. Die aus den beiden ersten Gleichungen ermittelten Parameterwerte $t_1 = 2$ und $t_2 = 1$ erfüllen auch die 3. Gleichung. Damit schneiden sich die Geraden im Punkt S(6, 4, 7).

Bem.:
Die Parameterwerte t_1 und t_2 sollten verschieden bezeichnet werden. Zwei Geraden können sich nämlich schneiden, ohne dass die beiden Parameterwerte im Schnittpunkt übereinstimmen. Dies würde bedeuten, dass die beiden Massenpunkte im Schnittpunkt zusammenstossen müssen.

Wir ändern nun schrittweise die Gleichung der 1. Geraden so ab, dass die restlichen Fälle auftreten:

zu 2.2: **g_1 und g_2 sind windschief**

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ersetzt man * durch irgendeine reelle Zahl $\neq 1$, dann ist die 3. Gleichung nicht erfüllt, die Geraden sind windschief.

zu 1.1: **g_1 und g_2 sind parallel**

Der Richtungsvektor der 1. Geraden muss ein Vielfaches des Richtungsvektors der 2. Geraden sein (d.h. die beiden Richtungsvektoren sind linear abhängig).

ein Beispiel:

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da der Startpunkt von g_1 nicht auf g_2 liegt, sind die beiden Geraden echt parallel.

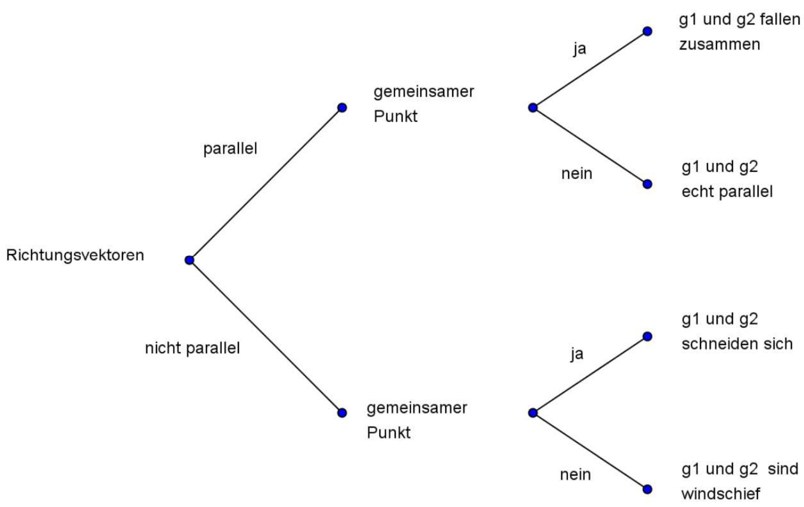
zu 1.2: **g_1 und g_2 fallen zusammen**

Die Koordinaten des Startpunkts sind so abzuändern, dass er auf g_2 liegt.
Wählt man z.B. $t_2 = -5$ dann stimmen die z-Koordinaten überein, für die x- bzw- y-Koordinaten ergibt sich x = -18 bzw. y = -14

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} -18 \\ -14 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Beispiel fallen die Geraden zusammen.

Gegenseitige Lage zweier Geraden (Zusammenfassung)



3.3 Abstands-, Winkelprobleme

Aufgabe:
Trage auf der Geraden g = AB von A aus den Abstand d ab.

B:
A(-2, -4, 2) B(-1, -2, 4)   d = 6

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor hat den Betrag 3. Dies bedeutet: Vergrössert man t um 1, so legt man auf der Geraden eine Strecke der Länge 3 zurück. Den gesuchten Punkten entsprechen die Parameterwerte $t_1 = 2$ und $t_2 = -2$.
Koordinaten der gesuchten Punkte: $P_1(0, 0, 6)$ bzw. $P_2(-4, -8, -2)$.

Wählt man als Richtungsvektor insbesondere einen Einheitsvektor, so misst $|t|$ gerade den Abstand des Geradenpunktes vom Startpunkt A.

Uebungsaufgabe:
Bestimme eine Gleichung der Winkelhalbierenden von zwei sich schneidenden Geraden
a: S(2, 4, 3) A(4, 8, 7) und b: S B(5, 6, 9)

Tip:
Wählt man für die Richtungsvektoren von a und b Vektoren mit gleichem Absolutbetrag, so spannen diese einen Rhombus auf. Die Diagonalen eines Rhombus halbieren die Winkel.

Lösung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Kontrolle: Die Richtungsvektoren sind orthogonal!

Aufgabe:
Bestimme den Zwischenwinkel der sich schneidenden Geraden a und b.

a: S(1, 1, 1)A(3, 4, 7)   b: SB(3, 2, 3)

Der Schnittwinkel φ wird von den beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossen:

$$\vec{u} = \overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad |\vec{u}| = 7 \qquad \vec{v} = \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |\vec{v}| = 3$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{19}{21} \qquad \varphi = 25.2°$$

Der Zwischenwinkel ist auch für windschiefe Geraden als Winkel zwischen zwei Richtungsvektoren erklärt (z.B. windschief senkrecht)
Aufgabe:

Gegeben sind die Punkte A(6, 0, 6) und B(6, 6, 6). Bestimme den Punkt P auf der Geraden

$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ so, dass das Dreieck APB bei P rechtwinklig ist.

Da die Vektoren $\overrightarrow{PA}$ und $\overrightarrow{PB}$ einen rechten Winkel einschliessen gilt: $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 3-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 6-t \\ 3-t \end{pmatrix} = t^2 - 4t + 3 = (t-1) \cdot (t-3) = 0$$

Den Parameterwerten $t_1 = 1$ und $t_2 = 3$ entsprechen die Punkte P_1 (3, 3, 6) und P_2(5, 1, 4)