10.5 Das Global Positioning System GPS NAVSTAR

Ein Beispiel aus der modernen Navigationstechnik

Das GPS dient zur Bestimmung des geografischen Standorts von verschiedenen Objekten. Es wurde um das Jahr 1980 vom amerikanischen Verteidigungsdepartement für militärische Zwecke entwickelt. Es besteht aus 24 Satelliten, welche die Erde auf Kreisbahnen von 26 600 km Radius in jeweils 12 Stunden umkreisen. Die Bahnen sind so gewählt, dass jederzeit mindestens vier Satelliten gleichzeitig genutzt werden können. Jeder Satellit ist mit einer extrem genau gehenden Atomuhr ausgestattet und sendet im Sekundentakt zur gleichen Zeit wie die andern Satelliten ein 20 Watt-Mikrowellensignal aus, das so codiert ist, dass der Empfänger, dessen Herkunft erkennt. Aus mindestens 3 Signalen, die je nach Abstand zum Satelliten zu unterschiedlichen Laufzeiten ankommen, kann mit einem Computer der Empfängerstandort auf einige Meter genau, mit Sonderverfahren sogar auf Centimeter genau berechnet werden. GPS NAVSTAR wird in der See- und Luftfahrt sowie in der Kartographie und Vermessungstechnik eingesetzt.

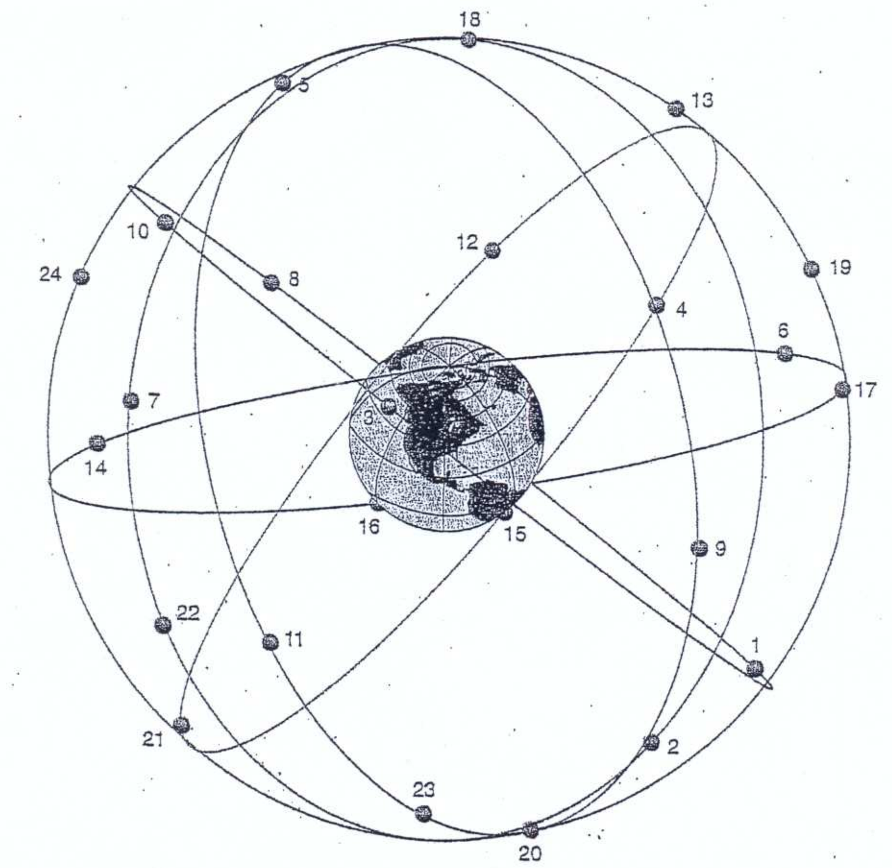

Bild 2: Seit 1993 kreisen 24 Satelliten in etwa 20 000 Kilometern Höhe um die Erde, die zusammen mit Bodenstationen die Grundausstattung des Global Positioning Systems (GPS) bilden. Jeweils vier haben eine gemeinsame, farbig dargestellte Bahnebene; die Umlaufbahnen sind um jeweils 55 Grad gegenüber dem Äquator geneigt.

Die grundlegende Idee wird im folgenden Beispiel illustriert:

B:
Die Koordinaten der drei Satelliten beziehen sich auf ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt im Erdmittelpunkt liegt und dessen z-Achse in Polrichtung zeigt. Sie sind zu dem Zeitpunkt, in dem sie gerade ihre Signale gegeben durch

A(16.1, 8.3, 19.5) B(12.4, 18.3, -14.8) C(-11.3, 13.7, 19.8)
Längeneinheit 1000 km

Ein Flugzeug empfängt die Signale nach einer Laufzeit von
$t_1 = 0.07672$ s $t_2 = 0.07612$ s $t_3 = 0.08047$ s

Aus den Laufzeiten können die Abstände des Flugzeugs von A bzw. B bzw. C in diesem Augenblick berechnet werden:
(Lichtgeschwindigkeit c = 300 000 km/s)

$d_1 = 23.1$ $d_2 = 22.8$ $d_3 = 24.1$ wobei $d = c \cdot t$

Die Koordinaten des Flugzeugs F(x, y, z) erfüllen die folgenden drei Abstandsbedingungen:

$$\left|\overrightarrow{FA}\right|^2 = (x-16.1)^2 + (y-8.3)^2 + (z-19.5)^2 = 529.7$$
$$\left|\overrightarrow{FB}\right|^2 = (x-12.4)^2 + (y-18.3)^2 + (z-14.8)^2 = 521.5$$
$$\left|\overrightarrow{FC}\right|^2 = (x+11.3)^2 + (y-13.7)^2 + (z-19.8)^2 = 582.8$$

Jede der drei Gleichungen stellt eine Kugel k dar, deren Mittelpunkt der jeweilige Satellit und deren Radius d_1, d_2 bzw. d_3 gegeben ist.

Das Problem, die Position des Flugzeugs zu bestimmen besteht also geometrisch darin, drei Kugeln zu schneiden.

Subtraktion der 2. von der 1. bzw. der 3. von der 2.Gleichung führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcl} -7.4x + 20y - 68.6z & = & 7.59 \\ -47.4x - 9.2y + 69.2z & = & -61.57 \end{array} \right|$$

Die erste Gleichung entspricht der Schnittebene der Kugeln k_A und k_B, die zweite der Schnittebene der Kugeln k_B und k_C

Das Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren dieser Ebenen hat die Richtung der Schnittgeraden. Gibt man z.B. x-Koordinate zu x = 0 vor, so erhält man einen Punkt der Schnittgeraden G(0, -4.913, -1.543)

Damit lautet die Gleichung der Schnittgeraden:

$$g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.913 \\ -1.543 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4.999 \\ 1.350 \end{pmatrix}$$

Schnitt dieser Geraden mit einer der drei Kugeln führt auf die folgende quadratische Gleichung:

$$(x-16.1)^2 + (-13.217 + 4.999 \cdot x)^2 + (-21.043 + 1.35 \cdot x)^2 = 529.7$$

mit den Lösungen $x_1 = 5.8$, $x_2 = 2.15$

Die zugehörigen Werte von y und z sind dann

$x_1 = 5.8$	$y_1 = 24.08$	$z_1 = 6.28$	$(r_1 = 25.6)$
$x_2 = 2.15$	$y_2 = 5.84$	$z_2 = 1.36$	

Position des Flugzeugs F(2.15, 5.84, 1.36)

Die 1. Lösung würde bedeuten, dass das Flugzeug rund 25 600 km vom Mittelpunkt der Erde entfernt wäre.

Unverfälschte Daten ermöglichen bei der Positionsangabe eine Genauigkeit von 10 m. Höhere Genauigkeiten werden etwa im Bereich der Verkehrslenkung oder Vermessung benötigt. Man erreicht sie mit Hilfe des Differential-GPS. Bodenstationen, deren Positionen exakt bestimmt wurden, analysieren die Fehler in den Satellitendaten und senden praktisch zeitgleich Korrekturinformationen an die GPS-Empfänger.

Auf der nächsten Seite folgt die Kopie einer Exceldatei, mit der die aufwändigen Rechnungen durchgeführt wurden.

GPS

Satellitenkoordinaten	A	B	C
Längeneinheit 1000 km			
x	*16.1*	*12.4*	*-11.3*
y	*8.3*	*18.3*	*13.7*
z	*19.5*	*-14.8*	*19.8*

Laufzeiten			
t	*0.07672*	*0.07612*	*0.08047*

Lichtgeschwindigkeit		
v	*300000*	*km/s*

Abstände			
d	23.016	22.836	24.141
d^2	529.7	521.5	582.8

Gleichung der Schnittebenen

Koeffizienten	x	y	z	
k_A und k_B	-7.4	20.0	-68.6	7.59
k_B und k_C	-47.4	-9.2	69.2	-61.57

Richtungsvektor der Schnittgeraden			
	752.880	3763.720	1016.080
	1	**4.999**	1.350
Punkt der Schnittgeraden			
	0	**-4.913**	-1.543

delta	16.100	13.213	21.043
Schnitt mit der Kugel k_A			
	t^2	t	1
Koeffizienten	27.812	-221.101	346.851

Diskriminante	10298.513

Lösungen	t_1	t_2
	5.799	2.150

Positionen	x	y	z	d
	5.80	24.08	6.28	25.55
	2.15	**5.84**	**1.36**	**6.37**