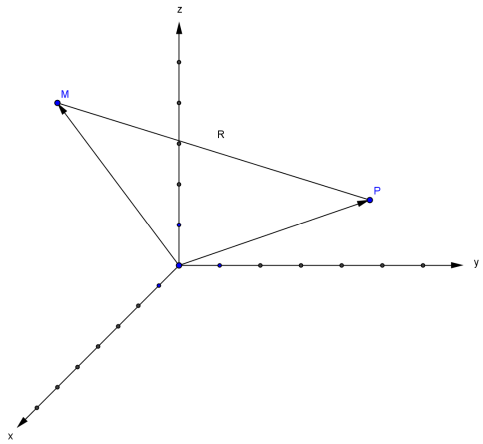
# 10. Die Kugel

## 10.1 Die Kugelgleichung




Def.
Unter der Kugel k mit Mittelpunkt M und Radius R verstehen wir
die Menge aller Punkte P, die vom Mittelpunkt M einen vorgegebenen abstand R haben, für die also gilt:

$\left|\overrightarrow{MP}\right| = R \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MP}\right|^2 = R^2$

oder in Koordinaten :

k: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = R^2$ Kugelgleichung (1)

$M(x_M, y_M, z_M)$ Kugelmittelpunkt, R Radius, P(x, y, z) Kugelpunkt

B:
Gleichung der Kugel mit Zentrum M(3, -2, 1), die den Punkt P(1, 4, 4) enthält.

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $R = \left|\overrightarrow{MP}\right| = 7$ k: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$

Zusatzfragen:
a)
In welchen Punkten schneidet k die z-Achse?
x = y = 0 $9 + 4 + (z - 1)^2 = 49$
$|z - 1| = 6$ führt auf die Schnittpunkte $S_1(0, 0, 7)$ $S_2(0, 0, -5)$

b)
Schneide die Kugel k mit der xy-Ebene?
z = 0 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (-1)^2 = 49$
$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 48$

k schneidet die xy-Ebene in einem Kreis mit Mittelpunkt Z(3,-2) und Radius $\rho = \sqrt{48}$

Durch Ausmultiplizieren von Gleichung (1) erhält man eine Gleichung der Form:

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ (2)

Umgekehrt kann jede Gleichung der Form (2) durch quadratische Ergänzung auf die Form (1) gebracht werden und stellt somit eine Kugel dar (allenfalls mit Radius 0 oder imaginärem Radius).

B:
Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 4z - 4 = 0$ kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$x^2 - 2x + \mathbf{1^2} + y^2 + 8y + \mathbf{4^2} + z^2 - 4z + \mathbf{2^2} = 4 + \mathbf{1^2} + \mathbf{4^2} + \mathbf{2^2} = 25$ bzw.
$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 25$ Kugel mit Mittelpunkt M(1, -4, 2) Radius R = 5

Weitere Beispiele:
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 35 = 0$ M(2, -3,,1) Radius R = 7
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 10z + 26 = 0$ M(2, -1, 5) Radius R = 2
$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z + 5 = 0$ M(-3, 1, 2) Radius R = 3

## 10.2. Schnitt einer Geraden mit einer Kugel, Kugeltangente

Aufgabe:
Berechne die Koordinaten des Schnittpunkte der Geraden

$$g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit der Kugel k: Mittelpunkt M(3,1,-2), Radius R = 7.

Setzt man die Koordinaten eines Geradenpunktes in die Kugelgleichung
k: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 49$ ein, so führt dies auf die quadratische Gleichung $t^2 = 1$.
Die gesuchten Schnittpunkte sind $S_1(5, -2, 4)$, $S_2(-3, 4, 0)$.

Allg.
Das Problem, eine Kugel mit einer Geraden zu schneiden, führt auf eine quadratische Gleichung im Parameter t mit der Diskriminante D.

3 Fälle:
$D > 0$ g schneidet k in 2 verschiedenen Punkten
$D = 0$ g ist Kugeltangente
$D < 0$ g meidet die Kugel

Aufgabe:

Die Gerade $g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist Tangente einer Kugel k mit Mittelpunkt M(3,2,4).

Bestimme den Kugelradius R und den Berührungspunkt B von t mit k.

Das Problem ist eine Einkleidung der Grundaufgabe, den kürzesten Abstand eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen.

Mögliche Lösungswege (siehe auch den Abschnitt „Abstand eines Punktes von einer Geraden“):

1. Variante

Der Punkt B auf g ist so zu bestimmen, dass der Vektor $\overrightarrow{MB}$ auf der Geraden g, d.h. auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden, senkrecht steht.

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} t-3 \\ 1+t-2 \\ 5-2t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-1 \\ 1-2t \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MB} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-1 \\ 1-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6t-6=0 \qquad t = 1$$

Berührungspunkt B(1, 2, 3) Radius $R = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{5}$

2. Variante

Der Berührungspunkt B ist der Schnittpunkt der Normalebene ν zu t durch M mit der Geraden g.

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g ist ein Normalenvektor von ν

Ansatz für ν: x + y – 2z + d = 0

M(3/ 2/ 4) ∈ ν d = 3

ν: x + y – 2z + 3 = 0

Schneidet man ν mit g, so führt dies auf t = 1

Berührungspunkt B(1, 2, 3), und Radius R = $\sqrt{5}$

3. Variante
Ist nur der Radius R gesucht, so kann man auch folgendermassen vorgehen:

Der Vektor $\overrightarrow{MA}$ (A ist der Anfangspunkt der Geraden g) und der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g spannen ein Parallelogramm auf. Sein Flächeninhalt kann einerseits elementar (Grundlinie $\left|\vec{u}\right|$, Höhe R) und andrerseits mit dem Vektorprodukt berechnet werden. Damit gilt:

$$R \cdot |\vec{u}| = |MA \times \vec{u}| \qquad R = \frac{|MA \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MA} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{MA} \times \vec{u}\right| = \sqrt{30} \qquad R = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

Uebungsaufgabe:

Kugelmittelpunkt M(-3, 5, -4), Tangente $g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung: Kugelradius: R = 7

## 10.3. Schnitt einer Kugel mit einer Ebene, Kugeltangentialebene

Die Tangentialebene $\tau$ der Kugel k(M,r) im Kugelpunkt T steht auf dem Berührungsradius senkrecht. $\overrightarrow{MT}$ ist also ein Normalenvektor von $\tau$.

Aufgabe:
Gegeben ist die Kugel k durch den Mittelpunkt M(2/ -4/ 3) und den Radius R = 6
Bestimme eine Gleichung der Kugeltangentialebenen, die zu der Ebene
$\varepsilon$: 2x - y + 2z - 10 = 0 parallel sind.

Bestimme zunächst die Berührungspunkte der beiden Tangentialebenen.
Wir tragen dazu auf dem Lot zu $\varepsilon$ durch den Kugelmittelpunkt M von M aus den Kugelradius R ab. Da der Richtungsvektor des Lots $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Länge 3 hat, sind die zu den Berührungspunkten gehörigen Parameterwerte 2 bzw. –2.

Berührungspunkt $T_1$(6/ -6/ 7) Tangentialebene $\tau_1$: 2x - y + 2z - 32 = 0.
Berührungspunkt $T_2$(-2/ -2/ -1) Tangentialebene $\tau_2$: 2x - y + 2z + 4 = 0.

Lösungsvariante mit HNF:
Ansatz für $\tau_{1,2}$: 2x - y + 2z + d = 0
Der Parameter d ist so zu bestimmen, dass der Kugelmittelpunkt M von der Tangentialebene den Abstand R hat.

$$\frac{|2 \cdot 2 - (-4) + 2 \cdot 3 + d|}{3} = 6 \qquad |d + 14| = 18 \qquad d = 4 \text{ bzw. } d = -32$$

Anwendung: Reflexion eines Lichtstrahls an einer Kugel

Gegeben ist die Kugel durch den Mittelpunkt M(2/ 3/ 0) und den Kugelpunkt T. Ein von L(6/ 9/ 7) ausgehender Lichtstrahl wird an der Kugel in T reflektiert. Wo trifft der reflektierte Strahl die xy-Ebene?

Reflexion an der Tangentialebene in T $\tau$: 2x + 2y + z - 19 = 0

L an $\tau$ spiegeln Lot l auf $\tau$: $l: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ t \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der zum Lotfusspunkt F gehörige Parameterwert ist $t_F$ = -2
Der zum Spiegelpunkt $\bar{L}$ gehörige Parameterwert ist damit t = 2·$t_F$ = -4 $\bar{L}$ (-2/1/3)

$\overrightarrow{\bar{L}T} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor des reflektierten Strahls $\bar{l}$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

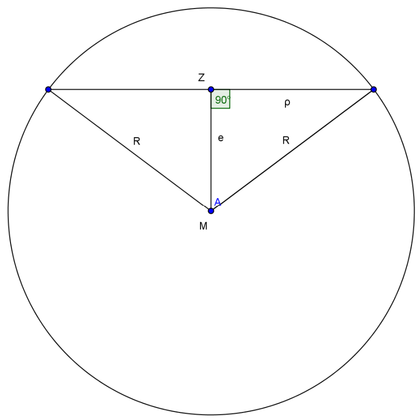
Der reflektierte Strahl trifft die xy-Ebene in (7/ 7/ 0)

Beim Schnitt einer Kugel k(M,R) mit einer Ebene ε können 3 Fälle auftreten:

Sei e der Abstand des Mittelpunkts M von der Ebene ε

| | |
|---|---|
| $e > R$ | ε meidet k |
| $e = R$ | ε ist Tangentialebene |
| $e < R$ | ε schneidet aus der Kugel einen Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius ρ<br>Z ist der Schnittpunkt des Lots aus M auf ε<br>ρ ergibt sich nach Pythagoras zu $\rho = \sqrt{R^2 - e^2}$ |

B:
k: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 225$
ε: $x + 2y + 2z - 30 = 0$




M(3, -1, 1) hat von ε den Abstand e = 9
Mittelpunkt des Schnittkreis
Z(6, 5, 7), ρ = 12