5. Komponentendarstellung von Vektoren

Grundebene R^2

R^2: Menge der reellen Zahlenpaare (x,y)

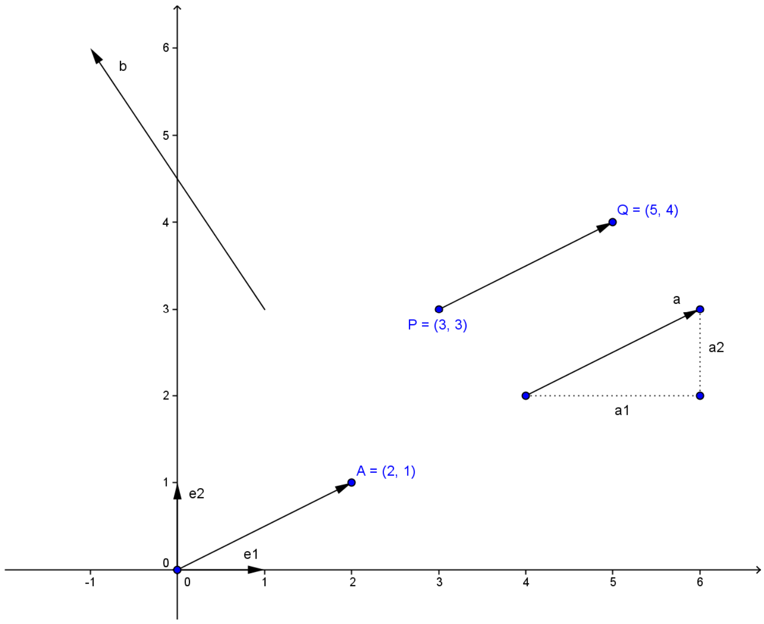
Wird P(3,3) in Q(5,4) verschoben, so nimmt die x-Koordinate um 2, die y-Koordinate um 1 zu. Wir schreiben dafür kurz:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ analog $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Spezialfälle:

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

heissen Basisvektoren



Allgemein:
Jede Verschiebung $\vec{a}$ in der Grundebene kann aus einer Verschiebung in x-Richtung und einer Verschiebung in y-Richtung zusammengesetzt werden. Verändert sich die x-Koordinate eines Punktes um a_1, die y-Koordinate um a_2 zu, so schreiben wir kurz:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$ a_1 und a_2 heissen die Komponenten des Vektors.

Die Komponenten eines Vektors können als Relativkoordinaten des Endpunkts bezüglich seines Anfangspunkts aufgefasst werden, d.h. sie geben an, wie sich x- bzw. y-Koordinate verändern, wenn man vom Anfangs- zum Endpunkt übergeht.

B: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ bedeutet: Addiert man zur x-Koordinate des Anfangspunkts 3 und zur y-Koordinate -2, so erhält man die Koordinaten des Endpunkts.

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen.

Trägt man $\vec{a}$ speziell im Nullpunkt O(0,0) ab mit Endpunkt A, dann heisst $\vec{a}$ Ortsvektor des Punktes A und es gilt:

Die Komponenten eines Ortsvektors stimmen mit den Koordinaten seines Endpunkts überein.

Folgende Sprechweisen sind gebräuchlich und gleichbedeutend:

- Der Punkt A mit den Koordinaten A(x_A , y_A) und
- Der Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$

Absoluter Betrag eines Vektors

Nach Pythagoras gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ absoluter Betrag (Norm) eines Vektors

B: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $|\vec{b}| = \sqrt{13}$

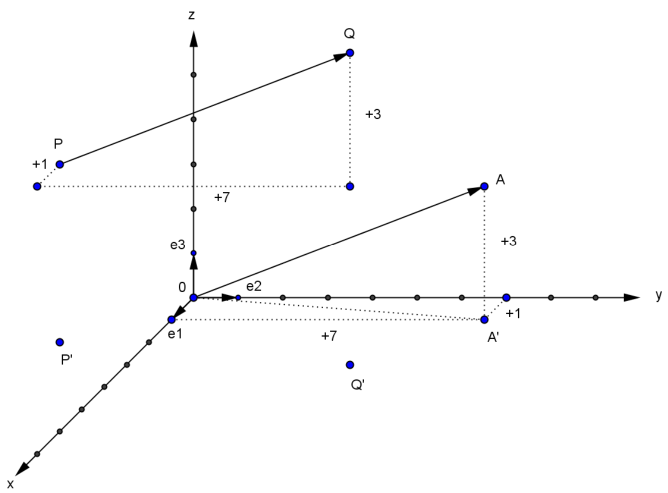
Kennt man von einem Vektor den absoluten Betrag und den Winkel bezüglich der positiven x-Achse, dann gilt für seine Komponenten $\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cos\alpha \\ |\vec{a}| \sin\alpha \end{pmatrix}$

B: $|\vec{a}| = 6.83$ $\alpha = 146.5°$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5.70 \\ 3.77 \end{pmatrix}$

Raum R^3

R^3: Menge der reellen Zahlentripel (x,y,z)

Die Skizze stellt den Schrägriss eines räumlichen Koordinatensystems dar mit den drei paarweise senkrecht aufeinanderstehenden Achsen.



Bezeichnungen:
xy-Ebene: Grundrissebene
yz-Ebene: Aufrissebene
xz-Ebene: Seitenrissebene

Skizze: P(2, -2, 4) Q(3, 5, 7)
Die x-Koordinate verändert sich um 1,
die y-Koordinate um 7 und
die z-Koordinate um 3

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ heissen Basisvektoren

Analog zur Grundebene gilt:
Jede Verschiebung des Raumes kann aus Verschiebungen in x-, y- und z-Richtung zusammengesetzt werden. Nimmt dabei die -Koordinate eines Punktes um a_1 , die y-Koordinate um a_2 und die z-Koordinate um a_3 zu, so schreiben wir kurz:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3,$$

a_1, a_2, a_3 heissen die Komponenten des Vektors.

Absoluter Betrag (Norm des Vektors)

$$|\vec{a}|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AA'}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$ Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck OA‘A

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$ Regel: Komponenten quadrieren, addieren, Wurzel ziehen

B: $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{59}$

6. Das Rechnen mit Komponenten

Einführende Aufgabe (Grundebene):

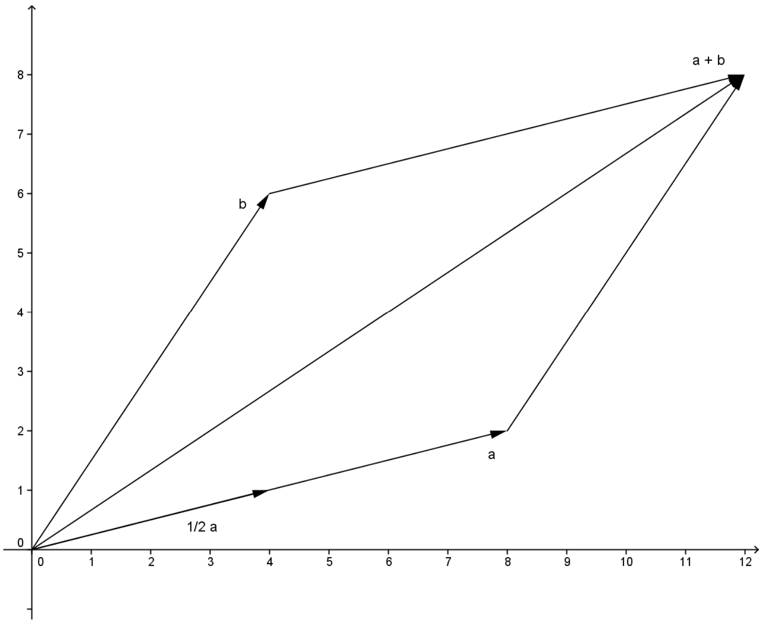
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Skizziere die Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ und ½ $\vec{a}$ und ermittle geometrisch die Komponenten dieser Vektoren.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 8+4 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 8 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Allgemein gilt in der Grundebene und im Raum:

Satz:
Vektoren werden addiert, subtrahiert, mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man die entsprechenden Operationen komponentenweise durchführt.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix} \quad k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$