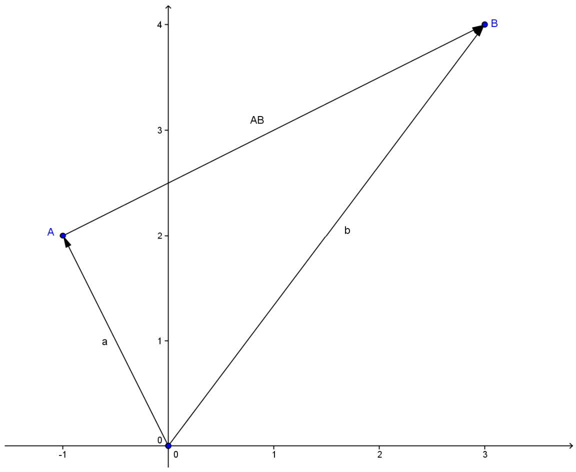
7. Grundaufgaben

Verbindungsvektor zweier Vektoren

Bei der Herleitung ist die Dimension (2 oder 3) unerheblich. Die Ergebnisse werden in der Grundebene illustriert.

Skizze: A(-1,2), B(3,4)

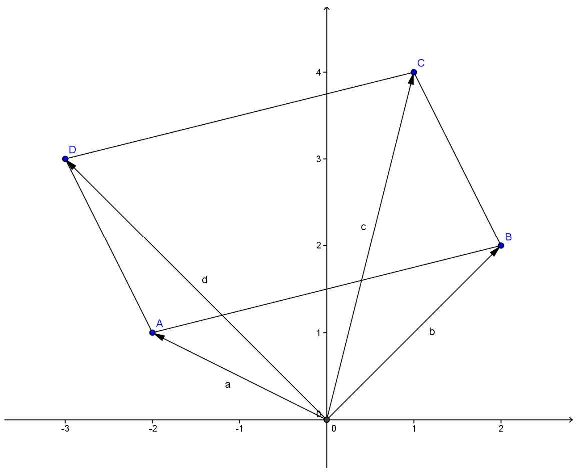


$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ (1) "Endpunkt - Anfangspunkt"
Verbindungsvektor zweier Punkte mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

B: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe (Grundebene):
Von einem Parallelogramm ABCD kennt man die aufeinanderfolgenden Punkte A,B,C. Bestimme D.

Skizze: A(-2,1), B(2,2), C(1,4)



$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$
$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$

Herleitungsvariante:

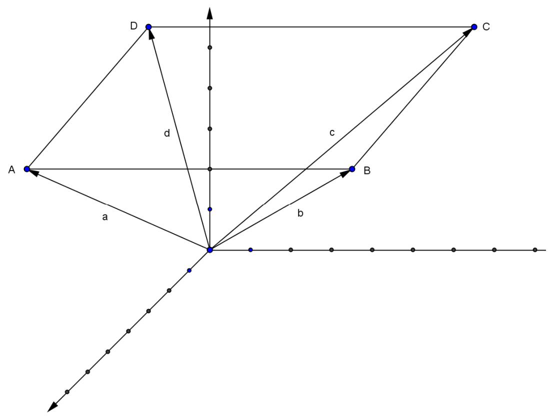
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ also $\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$ und daraus
$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$

B:
D(-3,3)

Aufgabe (Raum):
Von einem Parallelogramm ABCD kennt man die aufeinanderfolgenden Punkte A,B,C. Bestimme D.

A(5, -2, 5), B(7, 2, 9), C(3, 8, 7)

Lösung: D(1, 4, 3)



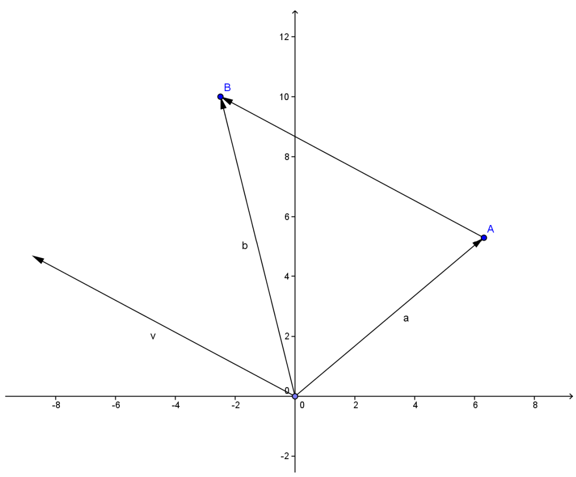
Aufgabe.
Von einem Vektor $\vec{v}$ kennt man den absoluten Betrag $|\vec{v}|$ = 9.98 und den Richtungswinkel φ = 151.9°. $\vec{v}$ wird im Punkt A(6.31 , 5.31) abgetragen. Wie heissen die Koordinaten des Endpunkts B?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 9.98 \cdot \cos(151.9°) \\ 9.98 \cdot \sin(151.9° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.80 \\ 4.70 \end{pmatrix}$$

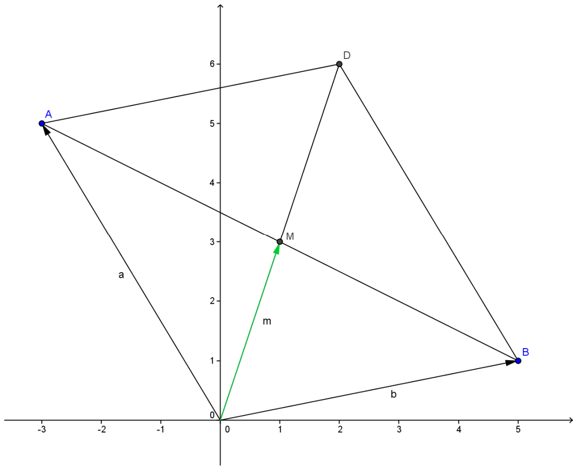
$$\vec{v} = \mathbf{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{b} = \vec{v} + \vec{a} = \begin{pmatrix} -8.80 + 6.31 \\ 4.70 + 5.31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.49 \\ 10.01 \end{pmatrix}$$

B(-2.49, 10.01)



Mittelpunkt einer Strecke



B:
Gegeben ist die Strecke A(-3,5), B(5,1)

Für den Ortsvektor des Mittelpunkts M der Strecke AB gilt:

$$\vec{m} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}$$
$$= \vec{a} + \tfrac{1}{2}\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = \tfrac{1}{2}\cdot(\vec{a} + \vec{b})$$
$$\vec{m} = \tfrac{1}{2}\cdot(\vec{a} + \vec{b}) \quad (2)$$

Mittelpunkt der Strecke AB

Die Koordinaten des Mittelpunkts sind also gleich dem arithmetischen Mittel der Endpunktskoordinaten.
$\vec{m}$ kann als halber Diagonalenvektor im Parallelogramm, das von den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, aufgefasst werden.

Im Beispiel hat der Mittelpunkt die Koordinaten M(1,3)

Bem.
$\vec{m}$ wird hin und wieder mit $\overrightarrow{AM}$ verwechselt!

Aufgabe im Raum:
Spiegle den Punkt P(5, 2, 1) am Punkt S(4, 4, 4).

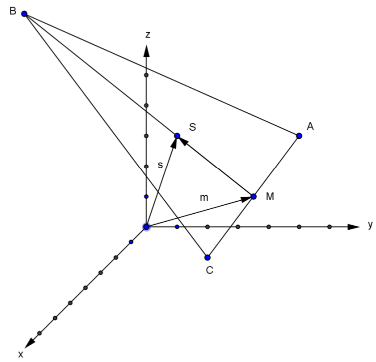
Für den Ortsvektor zum Spiegelpunkt Q gilt:

wegen $\vec{s} = \tfrac{1}{2}\cdot(\vec{p} + \vec{q})$ $\quad\quad$ $\vec{q} = 2\vec{s} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Uebungsaufgabe:
Von einem Parallelogramm ABCD sind die Punkte A(9, 2, 0) , B(3, 10, 4) und der Diagonalenschnittpunkt E(4, 7, 8) gegeben. Bestimme die Koordinaten von C

Lösung:
$\vec{c} = 2\cdot\vec{e} - \vec{a}$ $\quad$ C(-1, 12, 16)

Schwerpunkt eines Dreiecks



$\vec{s} = \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{m} + \frac{1}{3} \cdot (\vec{c} - \vec{m})$

$= \frac{2}{3} \cdot \vec{m} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} = \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})) + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\vec{s} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Die Koordinaten des Schwerpunkts eines Dreiecks sind gleich dem arithmetischen Mittel der Eckpunktskoordinaten.

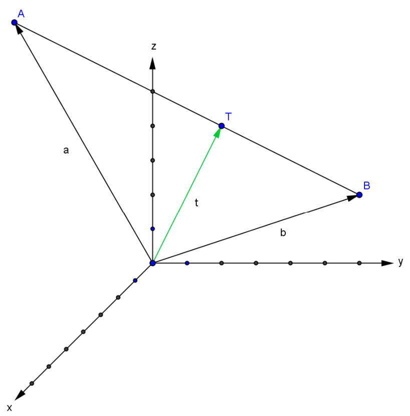
B:
Dreieck A(5, 3, 5) B(-4, 7, 7), C(2, -1, -6)
Schwerpunkt S(1, 3, 6)

Uebungsaufgabe:
Zeige: Im Dreieck A(1, -2, 3)B(5, 2, -5)C(9, 6, -7), dass der Schwerpunkt S die Seitenhalbieren s_a im Verhältnis 2:1 teilt.

Teilpunkt einer Strecke

Das Vorgehen wird am folgenden Beispiel illustriert:

Aufgabe:
Gegeben die Punkte A(-1, 0, 5) und B(4, 10, 15). Teile die Strecke AB innen im Verhältnis 3:2. Zeige, dass für den Ortsvektor des Teilpunkts T gilt: $\vec{t} = \frac{1}{5} \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b})$



$$\vec{t} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \vec{a} + \tfrac{3}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= \vec{a} + \tfrac{3}{5} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \tfrac{2}{5}\vec{a} + \tfrac{3}{5}\vec{b} = \tfrac{1}{5} \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

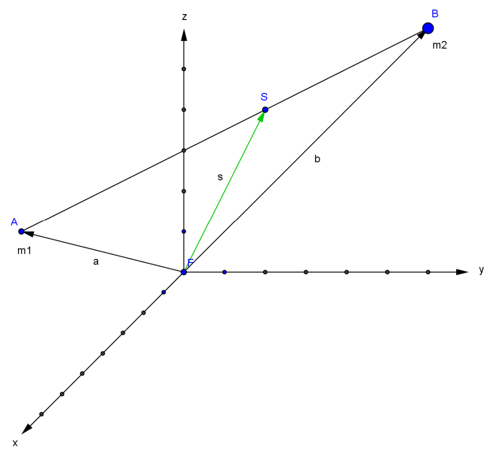
B: T(2, 6, 11)

Schwerpunkt zweier Massenpunkte

In den Punkten A befinde sich die Masse m_1,
im Punkt B die Masse m_2. Bestimme die
Koordinaten des Schwerpunkts S.

Aus der Physik ist bekannt, dass S die Strecke AB
im umgekehrten Verhältnis der beiden Massen
teilt,
d.h. es gilt:

$$m_1 \cdot \overline{AS} = m_2 \cdot \overline{BS} \quad \text{oder} \quad \frac{\overline{BS}}{\overline{AS}} = \frac{m_1}{m_2}$$



Daraus folgt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{AS} + \overline{BS}}{\overline{AS}} = 1 + \frac{\overline{BS}}{\overline{AS}} = 1 + \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

oder $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$ und damit

$$\vec{s} = \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b}}{m_1 + m_2}$$