

## 9. Metrische Probleme

### Vektoren mit vorgegebener Länge

Aufgabe (Raum):

Bestimme die Komponenten eines Vektors  $\vec{x}$ , der zum Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

entgegengesetzt gerichtet ist und die Länge 35 hat.

Wegen  $|\vec{a}| = 7$  ist  $\vec{e} = \frac{1}{7}\vec{a}$  ein Einheitsvektor. Die Komponenten des gesuchten Vektors ergeben sich, indem man den Einheitsvektor mit dem Faktor  $k = -35$  streckt.

$$\vec{x} = -35 \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Allgemein ist  $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$  ein Einheitsvektor mit gleicher Richtung wie  $\vec{a}$ .

## Abstand zweier Punkte

Der Abstand  $d$  zweier Punkte A und B ist gleich dem absoluten Betrag ihres Verbindungsvektors:  $d = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$ .

B:

A(-1, 2), B(2, 3)      Verbindungsvektor  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$        $d = \sqrt{10}$

Aufgabe:

Bestimme den Mittelpunkt M und den Radius r eines Kreises, der durch A(-2,1) und B(5,8) geht

- a) und dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt  
b) und der die x-Achse berührt.

a)

Ansatz für den gesuchten Mittelpunkt M(x,0).

Ortsbedingung:

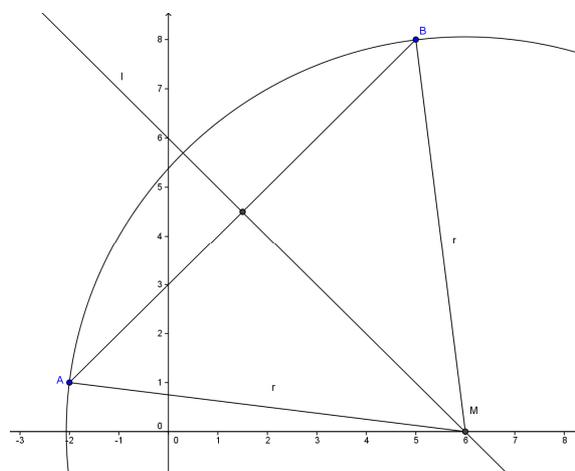
$$r = |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow r^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2$$

Statt der Abstände vergleicht man häufig die Quadrate der Abstände.

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -x-2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(x+2)^2 + 1 = (x-5)^2 + 64 \quad x = 6$$

Mittelpunkt M(6,0) Radius  $r = |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{65}$



2. Lösungsweg:

Der gesuchte Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten  $l$  der Strecke AB mit der x-Achse.

Steigung  $m_1$  der Strecke AB:  $m_1 = 1$

Steigung der Mittelsenkrechten ist  $m_2 = -1$  (wegen  $m_1 \cdot m_2 = -1$ )

Mittelpunkt der Strecke AB  $M(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$       Gleichung der Mittelsenkrechten  $l: y = 6 - x$

Schnittpunkt mit der x-Achse: M(6/0)

b)

Der Punkt M auf der Mittelsenkrechten von A und B so zu bestimmen, dass M von A und von der x-Achse den gleichen Abstand hat.

Ansatz für den gesuchten Mittelpunkt

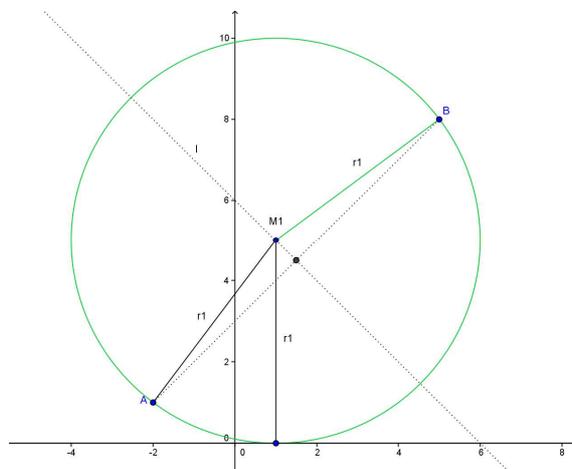
M(x, 6 - x).

$$r^2 = (6-x)^2 = (x+2)^2 + (5-x)^2$$

$$x^2 + 6x - 7 = (x-1) \cdot (x+7) = 0$$

Koordinaten der gesuchten

Mittelpunkte  $M_1(1,5)$ ,  $M_2(-7,13)$



Bem.: Die Aufgabe wurde im Kapitel Aehnlichkeit durch zentrische Streckung gelöst.

Aufgabe:

Welche Punkte der y-Achse sind vom Punkt A(-6, 0) doppelt so weit entfernt wie vom Punkt B(3, 3)?

Ansatz für den gesuchten Punkt P(0,y)

Ortsbedingung:

$$|\overline{PA}| = 2 \cdot |\overline{PB}| \Leftrightarrow |\overline{PA}|^2 = 4 \cdot |\overline{PB}|^2$$

$$36 + y^2 = 4(9 + y^2 - 6y + 9) \quad y^2 - 8y + 12 = (y - 6) \cdot (y - 2) = 0 \quad y_1 = 6 \quad y_2 = 2$$

Koordinaten der gesuchten Punkt P<sub>1</sub>(0,6), P<sub>2</sub>(0,2)

Konstruktive Lösung:

Apolloniuskreis mit der y-Achse schneiden.

Beispiele aus der Raumgeometrie:

$$A(-1, 3, -1) \quad B(1, 0, 5) \quad \text{Verbindungsvektor } \overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad d = 7$$

Aufgabe:

Welcher Punkt der z-Achse hat von A(2, 3, 3) und B(1, 2, 5) gleiche Entfernung ?

Ansatz für den gesuchten Punkt P(0, 0, z)

$$\overline{PA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3-z \end{pmatrix} \quad \overline{PB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5-z \end{pmatrix} \quad |\overline{PA}| = |\overline{PB}| \Leftrightarrow |\overline{PA}|^2 = |\overline{PB}|^2$$

$$4 + 9 + (3 - z)^2 = 1 + 4 + (5 - z)^2 \quad z = 2$$

Der Punkt P(0, 0, 2) hat die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe:

In welchen Punkten schneidet die Kugel mit dem Mittelpunkt M(-6, 3, 7) und dem Radius r = 7 die z-Achse.

$$|\overline{PA}|^2 = 36 + 9 + (7 - z)^2 = 49 \quad (7 - z)^2 = 4 \quad 7 - z = 2 \text{ oder } 7 - z = -2$$

$$z_1 = 5, z_2 = 9$$

Schnittpunkte S<sub>1</sub>(0, 0, 5), S<sub>2</sub>(0, 0, 9)

Aufgabe:

Vom Quadrat ABCD kennt man die Ecken B(5, 0, 10) und D(2, 21, 10). Ausserdem liegt die Ecke A in der xy-Ebene. Gesucht sind die Ecken A und C.

Die Quadratdiagonale BD hat wegen  $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}$  die Länge  $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{450} = 15 \cdot \sqrt{2}$ ,

die Quadratseite also die Länge 15.

Die in der xy-Ebene liegende Ecke A(x, y, 0) hat von den benachbarten Ecken B und D gleichen Abstand:

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-21 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{DA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{DA}|^2 : \quad (x-5)^2 + y^2 + 10^2 = (x-2)^2 + (y-21)^2 + 10^2$$

$$\text{oder vereinfacht:} \quad x = 7 \cdot (y-10) \quad (1)$$

Der Punkt A hat von B den Abstand 15, womit für das Abstandskadrat gilt:

$$(x-5)^2 + y^2 + 10^2 = 225 \quad (2)$$

(1) eingesetzt in (2) führt auf die quadratische Gleichung:

$$y^2 - 21y - 110 = (y-11) \cdot (y-10) = 0$$

mit den Lösungen  $y_1 = 10$  und  $y_2 = 11$ .

Der Diagonalschnittpunkt M hat wegen  $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} + \vec{d})$  die Koordinaten  $M(\frac{7}{2}, \frac{21}{2}, 10)$ .

Da M auch Mitte von AC ist, gilt:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) \text{ und damit } \vec{c} = 2\vec{m} - \vec{a}$$

1. Lösung: A(0, 10, 0) und C(7, 10, 20)      2. Lösung: A(7, 11, 0) und C(0, 10, 20)

### Ubungsaufgaben

a)

Welche Punkte der x-Achse sind von A(0, -2, 4) doppelt so weit entfernt wie von B(6, 2, -1)?

Lösung:

P<sub>1</sub>(4, 0, 0), P<sub>2</sub>(12, 0, 0)

b)

Gegeben sind die Punkte A(-1, 9, 4), B(11, 3, 8), C(t, 0, t). Bestimme t so, dass das Dreieck ABC mit der Basis AB gleichschenkelig ist.

Lösung:

Die Bedingung  $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$  ergibt die Lösung t = 3.