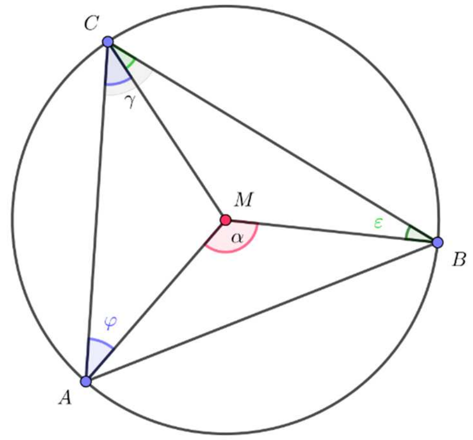
10. Ähnlichkeit am Kreis

Bekanntlich gilt der so genannte



> Peripheriewinkelsatz:
> Jeder Zentriwinkel (in der gleichen Halbebene) über einem Kreisbogen ist doppelt so gross wie der dazu gehörige Peripheriewinkel d.h. es gilt:
> $\alpha = 2\gamma$.

Beweis:

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:
1. Der Mittelpunkt M liegt auf einer Seite
   In diesem Spezialfall handelt es sich um den Satz des Thales
2. M liegt im Dreieck ABC
3. M liegt ausserhalb des Dreiecks ABC

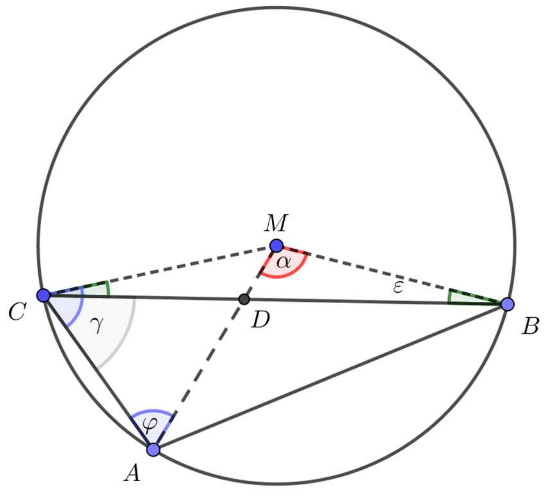
Beweis im Fall 2.

Da die beiden Dreiecke MBC und MAB gleichschenklig sind, sind die Basiswinkel ε bzw. φ gleich gross. Die entsprechenden Mittelpunktswinkel sind dann 180° - 2ε bzw. 180° - 2φ. Addiert man zu diesen beiden Winkeln den Zentriwinkel α so erhält man:
$(180° - 2\varepsilon) + (180° - 2\varphi) + \alpha = 360°$
Oder wegen $\varepsilon + \varphi = \gamma$ vereinfacht: $\alpha = 2(\varepsilon + \varphi) = 2\gamma$.

Beweis im Fall 3
In den Dreiecken CAD und BMD sind die Winkel in D gleich gross. Deshalb muss gelten:

$$-\varepsilon + \varphi = \varepsilon + \alpha$$

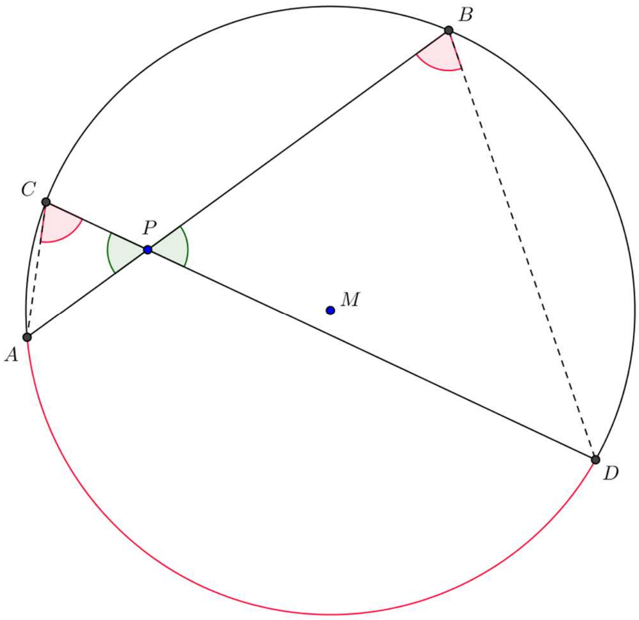
oder $\alpha = 2\varphi - 2\varepsilon = 2(\varphi - \varepsilon) = 2\gamma$



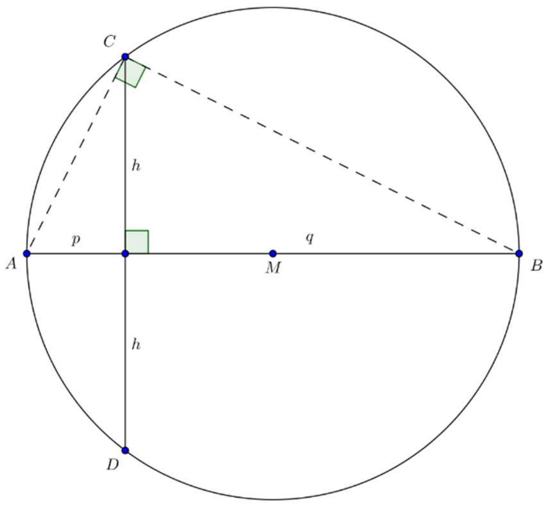
Sehnensatz:
Zeichnet man durch einen Punkt innerhalb eines Kreises Sehnen, so sind die Rechtecke aus den Sehnen inhaltsgleich.

Beweis:
Die Dreiecke ΔAPC und ΔDPB sind ähnlich
Begründung:
- Die Peripheriewinkel in B und C über dem Bogen AD sind gleich gross
- Die Scheitelwinkel in P sind gleich gross

Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit der Streckenverhältnisse:
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$
oder
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$



Der Höhensatz kann als Spezialfall des Sehnensatzes aufgefasst werden.



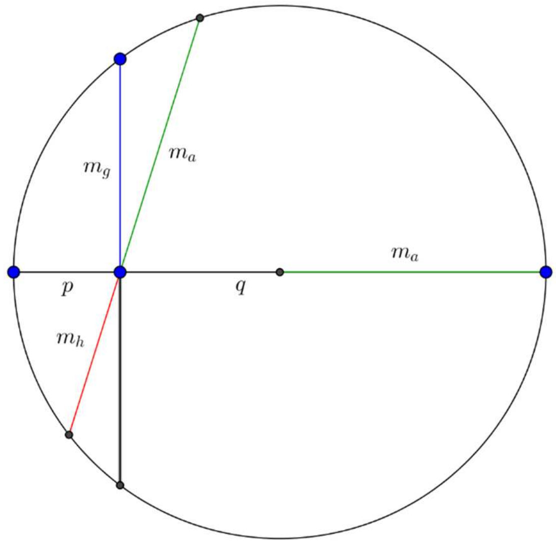
Der Sehnensatz ermöglicht eine einfache Konstruktion der drei in Abschnitt 9. erwähnten Mittelwerte:

Begründung
Zwischen den drei Mittelwerten besteht die folgende Beziehung:

$m_h = \frac{m_g^2}{m_a}$

oder

$m_g^2 = m_h \cdot m_a$



Analog zum Sehnensatz gilt der so genannte

> Sekantensatz:
> Zeichnet man durch einen Punkt ausserhalb eines Kreises Sekanten, so sind die Rechtecke aus den Sekantenabschnitten inhaltsgleich.

Die Dreiecke APD und CPB sind ähnlich.

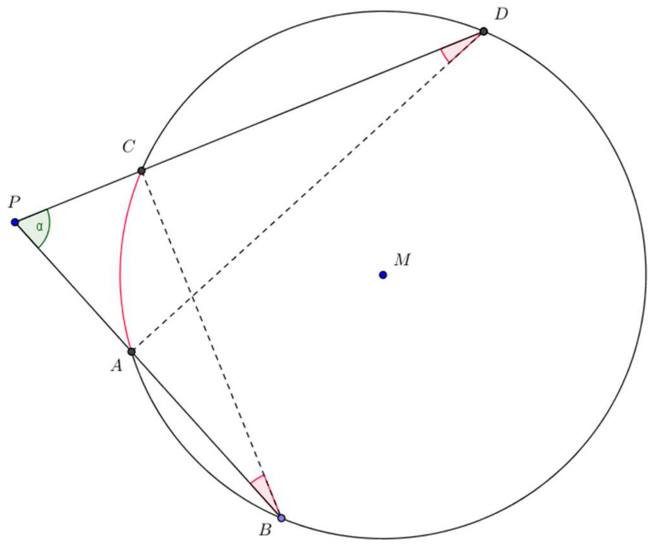
Begründung:
Die beiden Dreiecke stimmen im Winkel α überein.
Die Peripheriewinkel in B und D über dem Bogen AC sind gleichgross.

Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit der Streckenverhältnisse

$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$

oder

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$

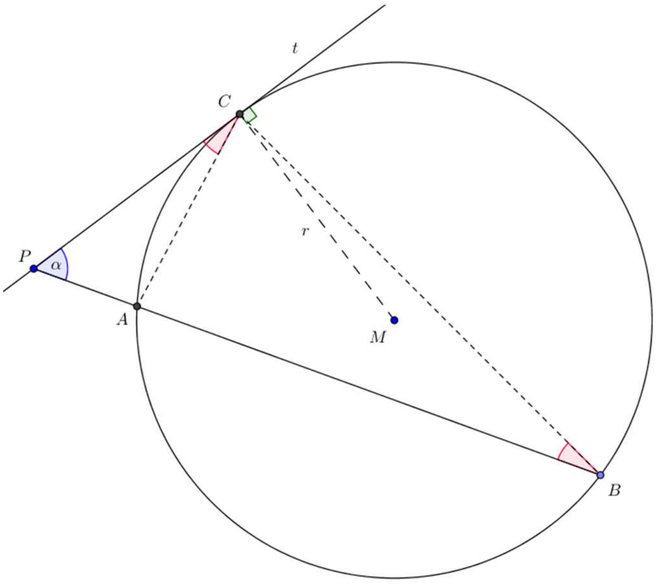


Tangentensatz:
Zeichnet man durch einen Punkt ausserhalb eines Kreises eine Tangente und eine Sekante, so ist das Quadrat über dem Tangentenabschnitt inhaltsgleich zum Rechteck aus den Sekantenabschnitten:
$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$

Begründung:
Die beiden Dreiecke stimmen im Winkel α überein.
Die Sehnen-Tangentenwinkel Peripheriewinkel in B und C sind gleichgross.

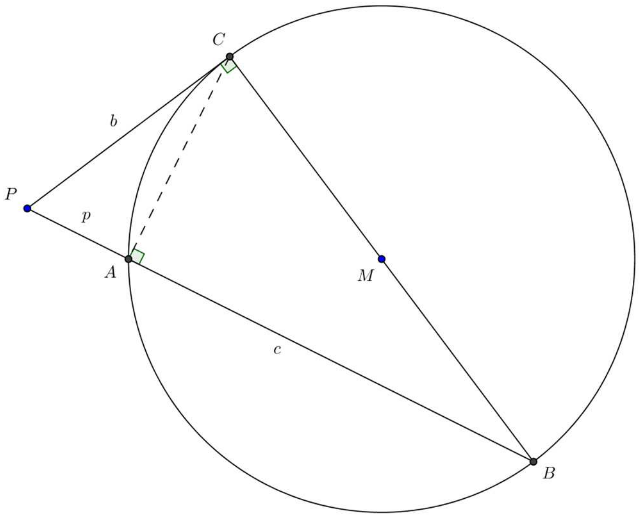
Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit der Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$
oder
$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$

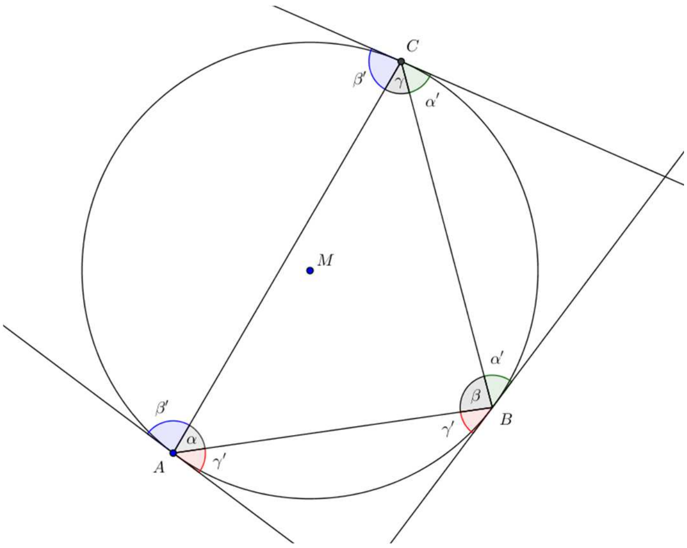


Der **Kathetensatz** kann als Spezialfall des Sekanten-Tangentensatzes aufgefasst werden

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$
Oder
$b^2 = p \cdot c$



Zu den Sehnen-Tangentenwinkeln:



Addiert man in den Dreiecksecken alle Winkel so erhält man:
$2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' + \alpha + \beta + \gamma = 540°$
also wegen der Winkelsumme im Dreieck:
$2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' = 360°$
oder
$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$
Andrerseits gilt für die Winkelsumme bei A:
$\alpha + \beta' + \gamma' = 180°$
und daraus folgt
$\alpha' = \alpha$
und analog
$\beta' = \beta$ und $\gamma' = \gamma$

Aufgabe:
Einem Kreis ist ein ähnliches Dreieck einzubeschreiben.