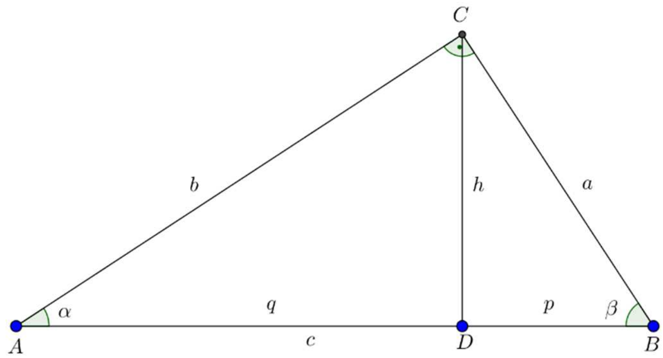
9. Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke

Rechtwinklige Dreiecke, die in einem weiteren Winkel übereinstimmen, sind schon zueinander ähnlich.

Die Höhe h zerlegt das Dreieck in zwei ähnliche Teildreiecke
Δ ADC und Δ DBC, symbolisch
Δ ADC ~ Δ DBC.

Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit entsprechender Seitenverhältnisse.

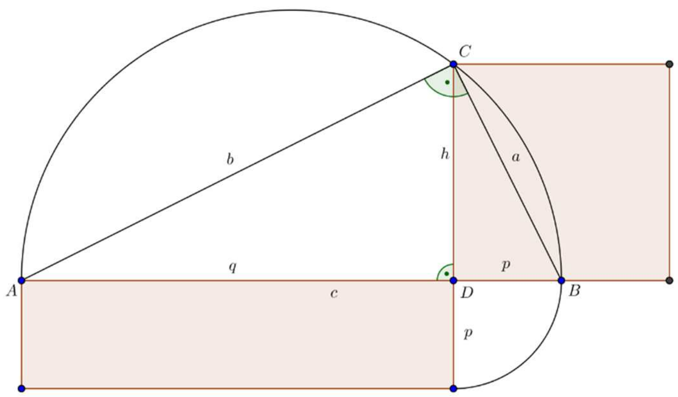


Um herauszufinden, welche Seiten sich entsprechen, betrachtet man z.B. die gegenüber liegenden Winkel im betreffenden Dreieck.

$$\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$$

$\boxed{h^2 = pq}$ **Höhensatz** (1)

Als Flächenverwandlung interpretiert: Das aus den Abschnitten der Hypotenusen gebildete Rechteck ist inhaltsgleich zum Höhenquadrat.



Jedes Teildreieck ist ähnlich zum ganzen Dreieck
Aus ΔABC ~ ΔCBD folgt:

$$\frac{a}{c} = \frac{p}{a}$$

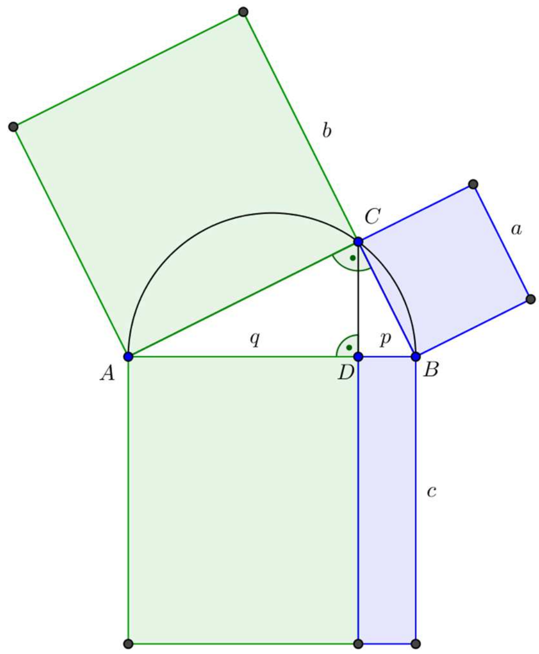
$\boxed{a^2 = pc}$ **Kathetensatz** (2)

Aus ΔABC ~ ΔACD folgt:

$$\frac{b}{c} = \frac{q}{b}$$

$\boxed{b^2 = qc}$ **Kathetensatz** (2)

Mit dem Kathetensatz kann zu einem Rechteck, ein inhaltsgleiches Quadrat konstruiert werden.



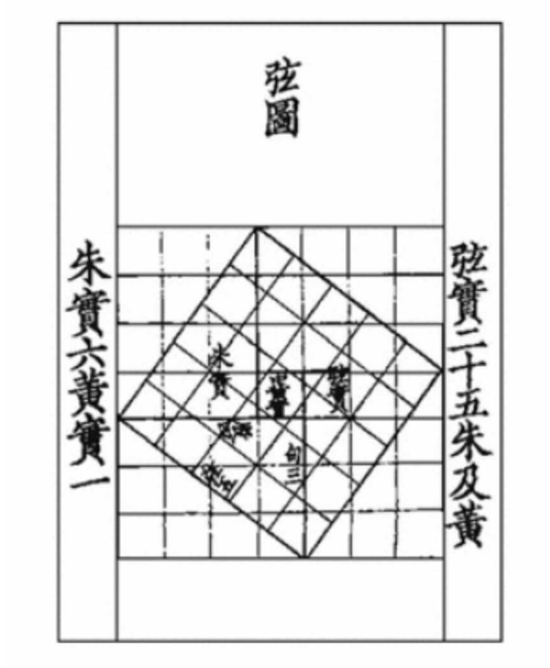
Addiert man die linken und die rechten Seiten der beiden Gleichungen, so erhält man:
$a^2 + b^2 = pc + qc = (p + q) \cdot c = c^2$

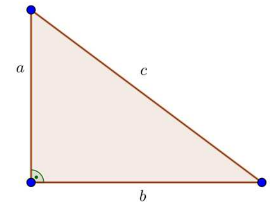
$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ **Pythagoras** (3)

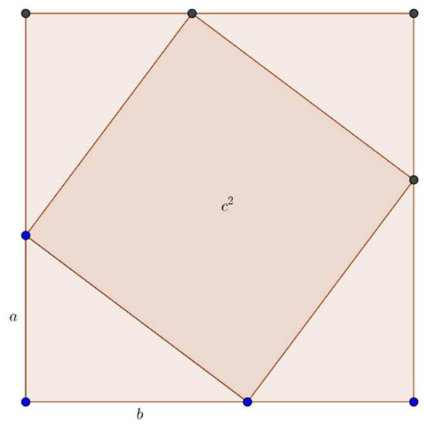
Der Pythagoras sagt also aus, dass das Quadrat über der Hypotenuse den gleichen Inhalt hat, wie die Summe der beiden Kathetenquadrate.

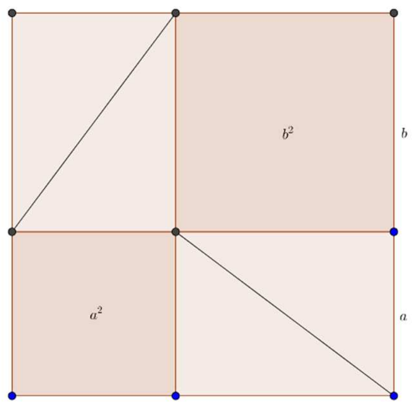
Ein früher Beweis ist bereits in einem chinesischen Text zu finden, der auf die Zhou-Dynastie zurückgeht (1046-256 v. Chr.) Quelle: Alsina, Nelsen: Perlen der Mathematik Springer 2015

Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b , der Hypotenuse c und dem Flächeninhalt I kann das Quadrat mit der Seite $a + b$ auf zwei verschiedene Arten zerlegt werden:
Einerseits gilt:
$I = c^2 + \frac{1}{2} \cdot 4ab$
und andrerseits:
$I = a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \cdot 4ab$
Deshalb folgt:
$a^2 + b^2 = c^2$









Es gilt auch die
Umkehrung des Pythagoras (ohne Beweis):

Gilt in einem Dreieck
$a^2 + b^2 = c^2$
dann ist das Dreieck bei C rechtwinklig.

Wie die Abbildung zeigt, kann die Umkehrung des Satzes zur Konstruktion eines rechten Winkels verwendet werden, was schon im alten Ägypten bekannt war.

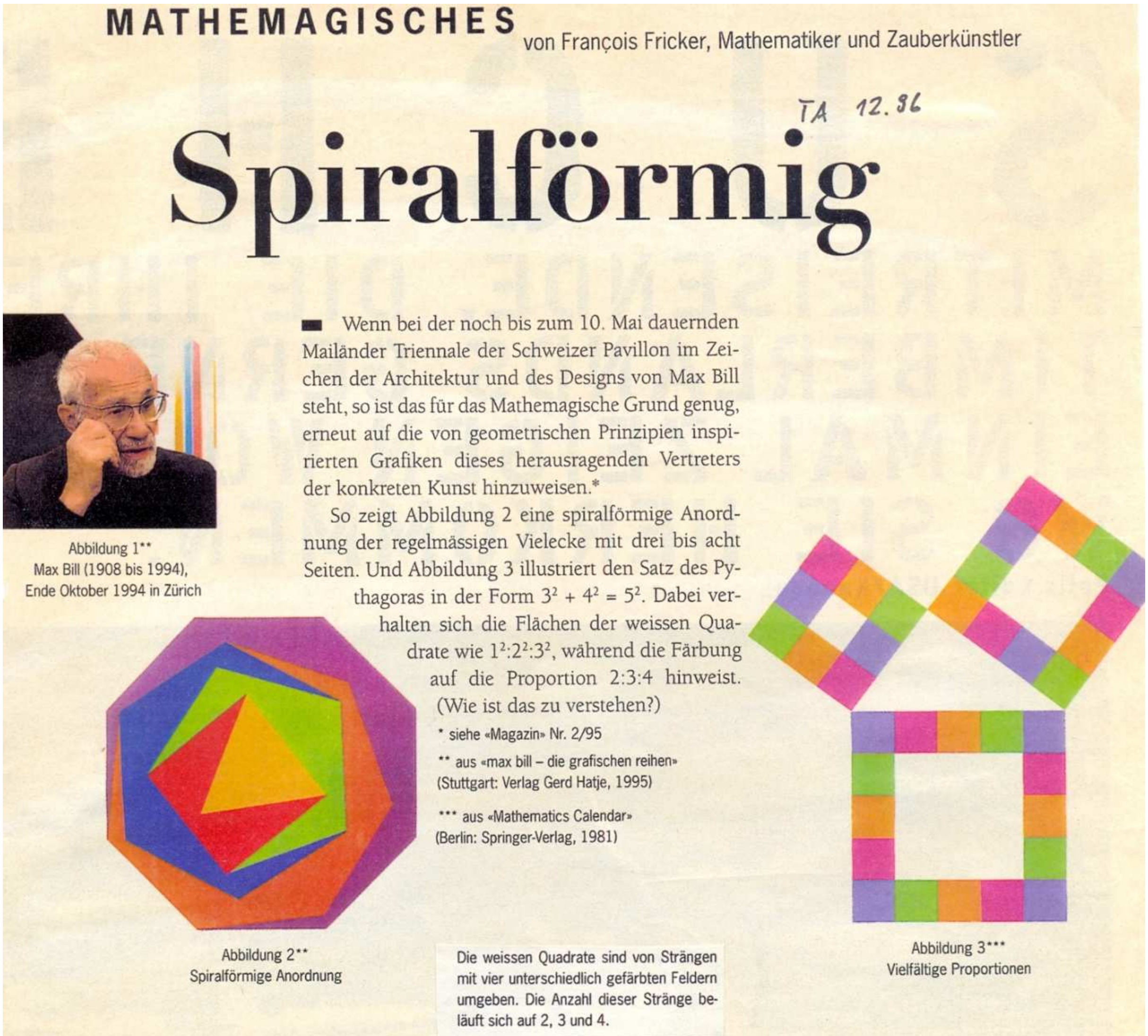
Ergänzungen:

Der Satz des Pythagoras ist auch auf einer griechischen Briefmarke verewigt.

„Schöne“ rechtwinklige Dreiecke

Das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 6, 8, 10 hat den Inkreisradius 2. Der Umfang und der Flächeninhalt 24 stimmen überein.
Das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 5, 12, 13 hat den Umfang und den Flächeninhalt 30.

Ein Beitrag im Tagesanzeiger Magazin Dezember 1996



MATHEMAGISCHES von François Fricker, Mathematiker und Zauberkünstler

TA 12.96

Spiralförmig

Abbildung 1**
Max Bill (1908 bis 1994), Ende Oktober 1994 in Zürich

■ Wenn bei der noch bis zum 10. Mai dauernden Mailänder Triennale der Schweizer Pavillon im Zeichen der Architektur und des Designs von Max Bill steht, so ist das für das Mathemagische Grund genug, erneut auf die von geometrischen Prinzipien inspirierten Grafiken dieses herausragenden Vertreters der konkreten Kunst hinzuweisen.*

So zeigt Abbildung 2 eine spiralförmige Anordnung der regelmässigen Vielecke mit drei bis acht Seiten. Und Abbildung 3 illustriert den Satz des Pythagoras in der Form $3^2 + 4^2 = 5^2$. Dabei verhalten sich die Flächen der weissen Quadrate wie $1^2:2^2:3^2$, während die Färbung auf die Proportion 2:3:4 hinweist. (Wie ist das zu verstehen?)

* siehe «Magazin» Nr. 2/95

** aus «max bill – die grafischen reihen» (Stuttgart: Verlag Gerd Hatje, 1995)

*** aus «Mathematics Calendar» (Berlin: Springer-Verlag, 1981)

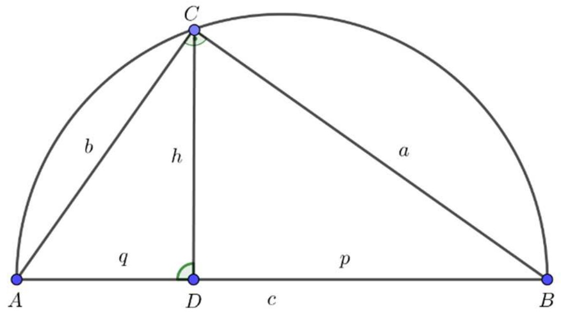
Abbildung 2**
Spiralförmige Anordnung

Die weissen Quadrate sind von Strängen mit vier unterschiedlich gefärbten Feldern umgeben. Die Anzahl dieser Stränge beläuft sich auf 2, 3 und 4.

Abbildung 3***
Vielfältige Proportionen

Beweisvarianten:

1. Kathetensatz mit dem Pythagoras



Pythagoras in den Teildreiecken
ADC

$$h^2 = b^2 - q^2$$

und DBC

$$h^2 = a^2 - p^2$$

Gleichsetzen ergibt:

$$a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

oder

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = (p+q)(p-q) = c \cdot (p-q) = c \cdot p - c \cdot q$$

und damit

$a^2 - b^2 = c \cdot p - c \cdot q$ (1)

Pythagoras im Dreieeck ABC

$a^2 + b^2 = c^2 = (p+q)^2 = c \cdot (p+q) = c \cdot p + c \cdot q$ (2)

Der Kathetensatz ergibt sich nun durch addition bzw.Subtraktion der Gleichungen (1) und (2)

$a^2 - b^2 = c \cdot p - c \cdot q$ (1)
$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q$ (2)
$2a^2 = 2c \cdot p$ bzw. $2b^2 = 2 \cdot q$

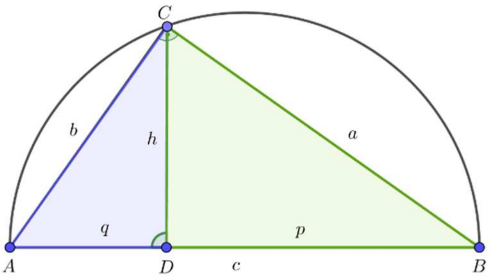
2. Höhensatz aus Kathetensatz

Pythagoras im Dreieck DBC:

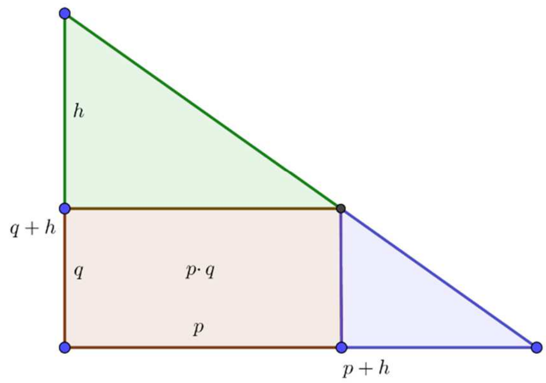
$$h^2 + p^2 = a^2$$

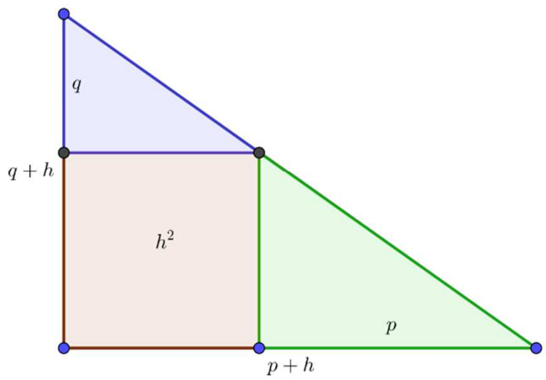
Kathetensatz im Dreieck DBC: $c \cdot p = a^2$
aus der Gleichheit der beiden linken Seiten folgt: $h^2 + p^2 = c \cdot p$
und daraus
$h^2 = c \cdot p - p^2 = p \cdot (c - p) = p \cdot q$

3. Höhensatz durch Ergänzen der beiden Teildreiecke ADC und DBC zu einer neuen Figur auf zwei verschieden Arten



Da die durch Ergänzung entstandenen Figuren kongruent sind, sind das ergänzte Quadrat und das ergänzte Rechteck flächengleich.

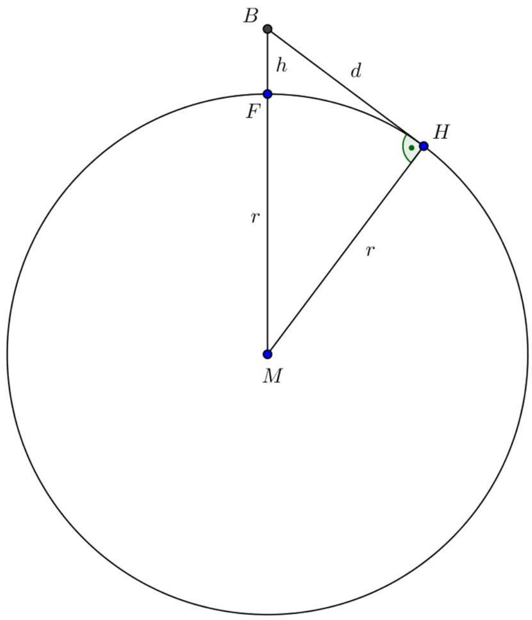




Beispiele zur Satzgruppe des Euklid

a) **Pythagoras**:

Aufgabe:
Wie weit kann ein Beobachter B sehen, der sich h m über dem Meer befindet?



Für die Aussichtsweite $d = \overline{BH}$ gilt nach Pythagoras (Variante: Tangentensatz):

$$d^2 = (r+h)^2 - r^2 = 2rh + h^2 = 2rh \cdot \left(1 + \frac{h}{2r}\right)$$

Da der zweite Summand erheblich kleiner als der erste ist, kann er vernachlässigt werden:

$$d = \sqrt{2rh + h^2} \approx \sqrt{2rh} = \sqrt{2r} \cdot \sqrt{h}$$

oder mit dem Erdradius 6367 km

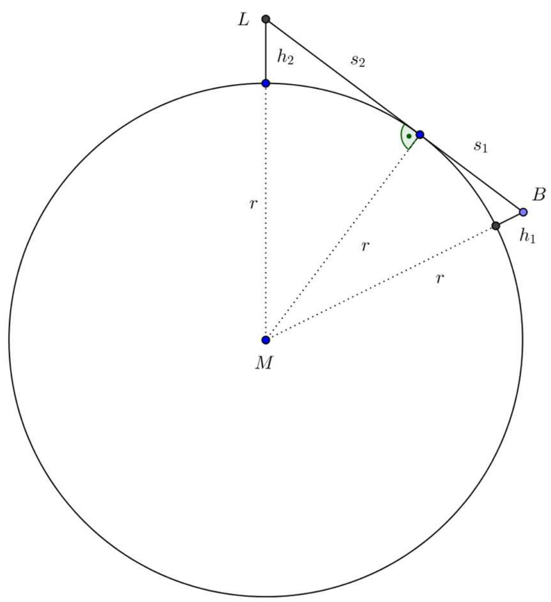
$$d \approx = \sqrt{2r} \cdot \sqrt{h}$$

$$d = \sqrt{2rh + h^2} \approx \sqrt{2rh} = \sqrt{2r} \cdot \sqrt{h}$$

$$\approx \sqrt{2 \cdot 6367} \cdot \sqrt{h} \approx 112 \cdot \sqrt{h}$$

Beispiele:	Höhe h	Sichtweite d
Beobachter am Meerufer	1.7 m	≈ 4.6 km
Beobachter am Meerufer (auf Zehenspitzen)	1.81 m	≈ 4.7 km
Beobachter auf Eiffelturmhöhe	0.3 km	≈ 61.8 km
Vesuv	1.3 km	≈ 147 km
	2 km	≈ 160 km
Flugzeug	6 km	≈ 276 km
Apollo 11 (16.7.99)	200 km	≈ 1600 km

Übungsaufgaben:
a)
Wie hoch muss ein Leuchtturm sein, der einen Rundblick von 15 km gestattet?
c)
In welcher Entfernung s sieht ein Beobachter B auf einem Schiff in der Höhe $h_1 = 50m$ einen Leuchtturm L der Höhe $h_2 = 140m$ auftauchen?



Lösung:

$$s = s_1 + s_2 = \sqrt{2rh_1} + \sqrt{2rh_2} \approx 67km$$

Übungsaufgaben:
a)
In ein Brett ist ein kreisförmiges Loch mit einem Radius von 8 cm gebohrt. In dieses Loch legt man eine Kugel mit dem Radius $r = 10\ cm$. Wie tief sinkt die Kugel ein?
b)
Zwei Kugeln mit gleichem Radius $r = 12\ cm$ liegen auf einer Ebene und berühren sich. Welchen Radius hat die grösste Kugel, die im Zwischenraum Platz hat?

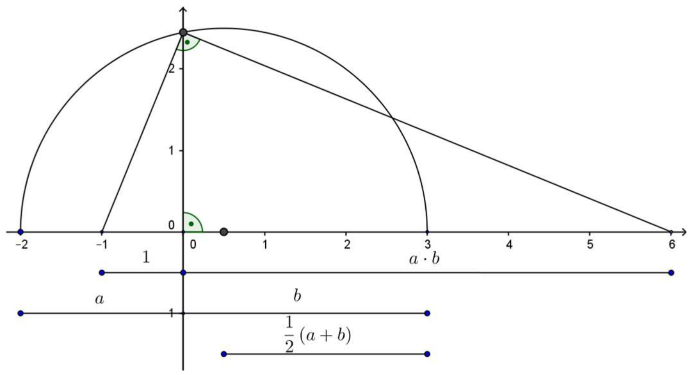
Lösungen:
a) $4\ cm$
b) $3\ cm$

b) **Höhensatz**:

Mit dem Höhensatz können die Resultate von arithmetischen Operationen konstruktiv ermittelt werden.

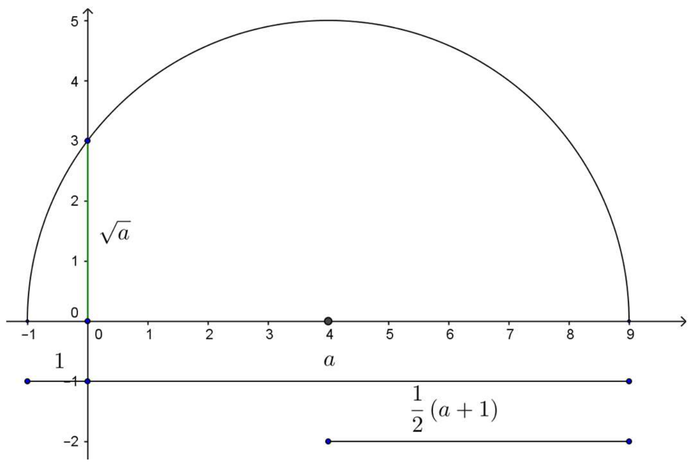
Multiplikation durch Konstruktion

$2 \cdot 3 = 6$

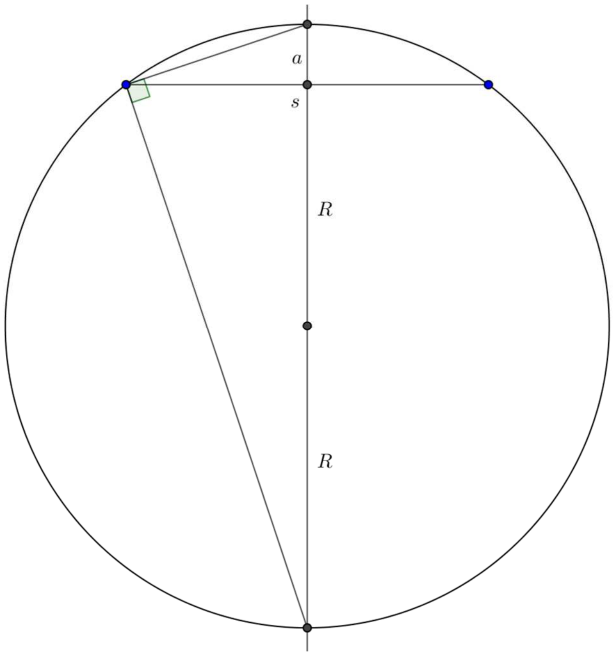


Konstruktion der Quadratwurzel

$\sqrt{9} = 3$



Eine Näherungsformel für die Aufwölbung:



Wieviele Meter wölbt sich der Bodensee ungefähr auf zwischen Konstanz und Bregenz, die voneinander 46 km entfernt sich?
Erdradius $R \approx 6370\ km$

Nach dem Höhensatz gilt:
$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = a(2R-a)$
Wegen $a << 2R$ ist $a(2R-a) \approx 2aR$.
Es gilt also ungefähr:
$\left(\frac{s}{2}\right)^2 \approx 2aR$ also $a = \frac{s^2}{8R}$. Da $8R \approx 50000$
$a \approx \frac{s^2}{50000}$
Auffallend ist die quadratische Abhängogkeit von der Distanz. Gibt man s in km an, dann erhält man für die Aufwölbung in m die einfache Näherungsformel:
$a \approx \frac{s^2}{50}$
Im Beispiel: s=46 erhält man für a$a \approx 42\ m$
Der Höhensatz besagt, dass die Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck das geometrische Mittel der beiden Hypotenusenabschnitte ist. Da der Radius des Thaleskreises das arithmetische Mittel der beiden Hypotenusenabschnitte ist, folgt unmittelbar:
Das geometrische Mittel ist kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel.

Wächst eine Grösse im 1. Jahr um 21%, anschliessend im 2.Jahr um 44 %, so wächst sie jährlich um 32%.
Begründung:
Dem Gesamtwachstum entspricht der Wachstumsfaktor $r^2 = 1.21 \cdot 1.44 = 1.1^2 \cdot 1.2^2$
$r = 1.1 \cdot 1.2 = 1.32$ ist also das geometrische Mittel der beiden Wachstumsfaktoren.

Dem harmonische Mittel von p und q entspricht geometrisch die Länge der Strecke CE.

Nachweis:
Da die Dreiecke EDC und MCD ähnlich sind gilt für das Verhältnis der entsprechenden Strecken:
$\frac{\overline{EC}}{m_g} = \frac{m_g}{m_a}$
$\overline{EC} = \frac{m_g^2}{m_a} = \frac{mg}{\frac{1}{2}\cdot(p+q)} = \frac{2pq}{p+q} = m_h$

Dazu ein Beispiel:
Fährt man eine Strecke der Länge l mit der Geschwindigkeit p und anschliessend eine Strecke gleicher Länge mit der Geschwindigkeit q, dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit das harmonische Mittel von p und q.
Zahlenbeispiel:
p = 20 km/h, q = 30 km/h   Durchschnittsgeschwindigkeit: 24 km/h.