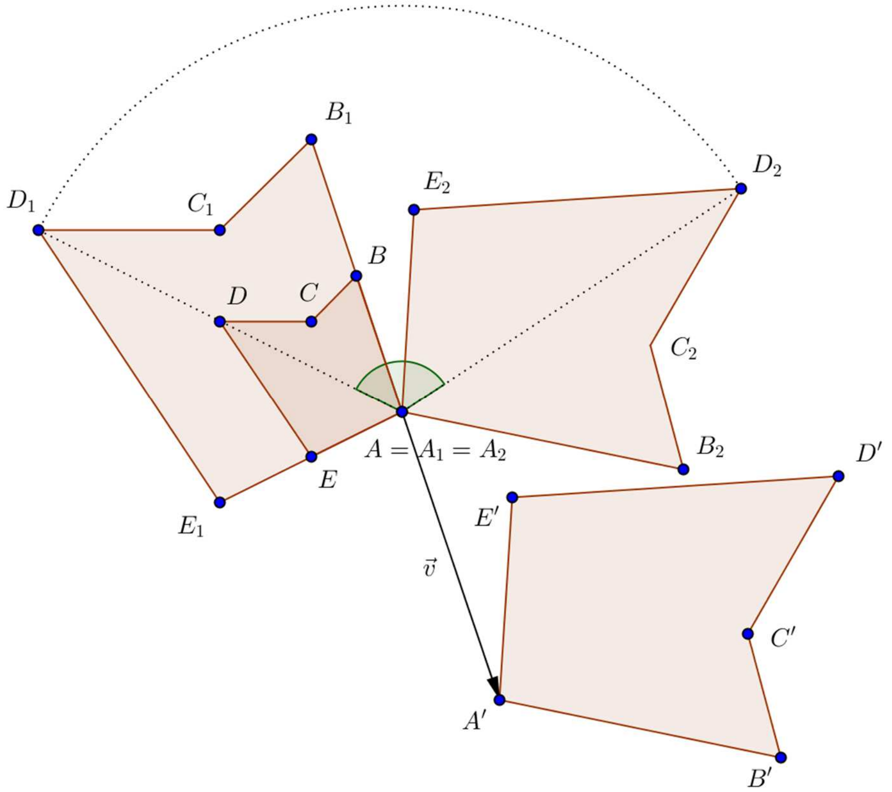
6. Ähnlichkeitsabbildungen

Aufgabe:
Ein gegebenes Vieleck ABCDE ist durch Hintereinander ausführen von Kongruenz-abbildungen (Geradenspiegelungen, Drehungen, Translationen, Punktspiegelungen) und zentrischen Streckungen in eine Bildfigur abzubilden.



In der Skizze wird das Vieleck ABCDE durch Hintereinander ausführen einer zentrischen Streckung, einer Drehung (Rotation) und einer Translation in das Vieleck A´B´C´D´E´ abgebildet. Die Vielecke haben die gleiche Form. Wir sagen die beiden Vielecke sind ähnlich. Allgemein definieren wird:

> Definition:
> Eine Abbildung, die aus Kongruenzabbildungen und zentrischen Streckungen zusammengesetzt ist, heisst **Ähnlichkeitsabbildung**. Zwei Figuren F und F‘, die durch eine Ähnlichkeitsabbildung auseinander hervorgehen, heissen zueinander ähnlich.

Formulierungsvariante:
Zwei Figuren F und F´ sind zueinander ähnlich (symbolisch: F ~ F´), wenn man F so zentrisch strecken kann, dass die Bildfigur F´ zu F kongruent ist.

Es gilt der folgende Satz (ohne Beweis)
Jede Kongruenzabbildung lässt sich durch Hintereinander Ausführen von höchstens drei Geradenspiegelungen darstellen

Beispiele:
Alle gleichseitigen Dreiecke, Quadrate, Kreise sind zueinander ähnlich.

Aus den Eigenschaften von Kongruenzabbildungen und zentrischen Streckungen folgt der wichtige

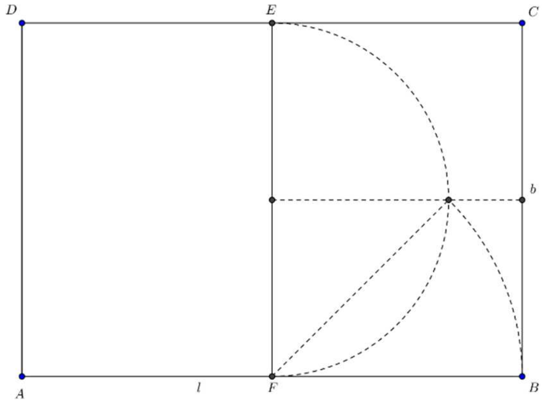
Satz: In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel gleich gross, das Verhältnis der Längen entsprechender Strecken ist gleich gross.

Es kann bewiesen werden, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gilt:

Satz: Wenn bei zwei Vielecken entsprechende Winkel gleich sind **und entsprechende Seiten im gleichen Verhältnis stehen**, dann sind sie ähnlich.

Eine Anwendung: Die **DIN-Papierformate** A4, A3, A2, ….

Die im Handel erhältlichen Papierformate sind sogenannte DIN-Rechtecke (DIN: Abkürzung für **D**as **I**st **N**orm, früher **D**eutsche **I**ndustrie-**N**orm). Halbiert man bei einem DIN-Rechteck die Längsseiten, so entsteht wieder ein DIN-Rechteck, das zum ursprünglichen ähnlich ist. A0 hat den Inhalt 1 m^2.



Da die Rechtecke ABCD und FBCE zueinander ähnlich sind, stimmt das Verhältnis von Länge und Breite überein:

$$\frac{l}{b}=\frac{b}{\frac{l}{2}}=\frac{2b}{l} \qquad l^2=2b^2 \quad l=b\sqrt{2}$$

Variante:
Da für das Flächenverhältnis der beiden ähnlichen Rechteckegilt: $k^2 = 2$, gilt für das Seitenverhältnis $\frac{l}{b}=\sqrt{2}$

Aus der Bedingung, dass das Format A0 den Inhalt 1 m^2 hat, folgt

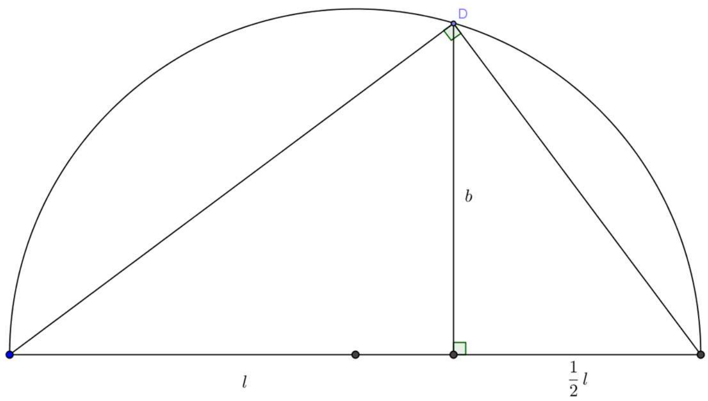
$$b\cdot l=b\cdot b\sqrt{2}=1 \qquad b^2=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Damit ergeben sich die folgenden Formate:

Format	Länge	Breite
A0	118.92 cm	84.09 cm
A1	84.09 cm	59.46 cm
A2	59.46 cm	42.04 cm
A3	42.04 cm	29.73 cm
A4	29.73 cm	21.02 cm

Gesetzmässigkeiten:
Dividiert man die Länge durch $\sqrt{2}$ so erhält man die Breite. Diese stimmt mit der Länge des nächsten Formats überein. Dividiert man die Länge durch 2 so erhält man die Breite des nächsten Formats.

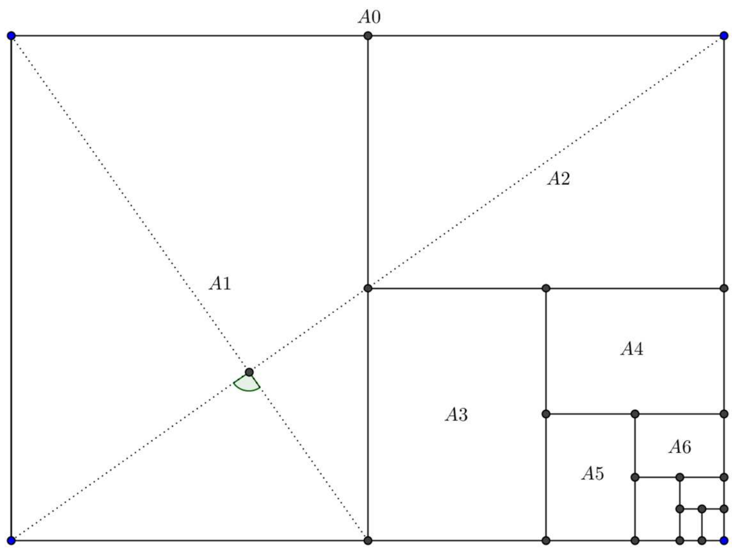
Konstruktion der DIN-Form in der nebenstehenden Figur (die Breite ist das geometrische Mittel aus der Länge und der halben Länge)



Begründung:
Nach dem → Höhensatz gilt:
$b^2 = l \cdot \frac{l}{2}$ oder $l^2 = 2b^2$

Da jedes Format gleich der „Summe“ aller nachfolgenden Formate ist, ergibt sich ausserdem

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+.....=1$



→ nichtabbrechende geometrische Reihe

How can this be true?

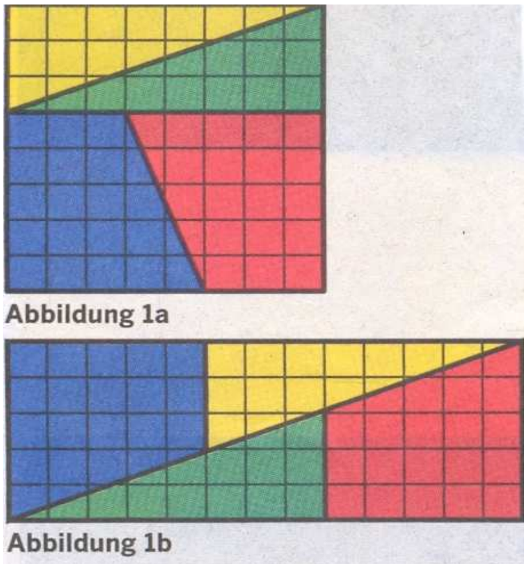
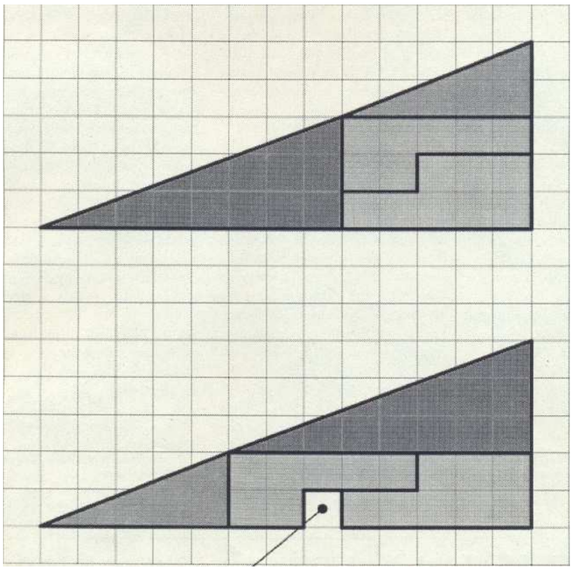


Abbildung 1a

Abbildung 1b



Zunächst scheint es, dass in den beiden Abbildungen der Flächeninhalt allein durch Umordnen vergrössert werden könnte. Betrachtet man aber die Streckenverhältnisse, dann ist zu erkennen, dass die vorkommenden Winkel nur annähernd gleich sind. Tatsächlich ist beim 2. Beispiel die „Hypotenuse“ ein Streckenzug.

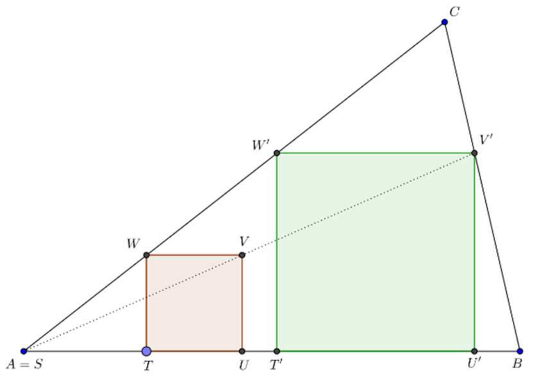
7. Die Ähnlichkeitsmethode

Die **Ähnlichkeitsmethode** ist eine schöne Anwendung des Abbildungsgedankens bei Konstruktionsaufgaben:

1. Konstruiere zunächst eine Figur, die die gestellten Forderungen teilweise erfüllt
2. Strecke die Figur von einem passend gewählten Zentrum aus so, dass die Bildfigur alle Forderungen erfüllt.

Aufgabe:
Dem Dreieck ABC soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, dass eine Quadratseite auf AB liegt.

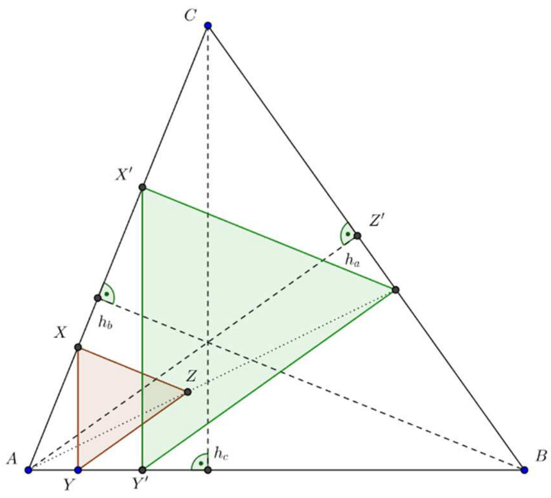
Konstruktionsbeschreibung:
Zunächst wird ein Quadrat TUVW konstruiert mit einer Seite auf AB und einer Ecke auf AC. Anschliessend wird das Quadrat mit Zentrum S = A so gestreckt, dass R´ auf BC zu liegen kommt.



Aufgabe:
Dem Dreieck ABC ist ein Dreieck einzubeschreiben, dessen Seiten zu den Höhen des gegebenen Dreiecks parallel sind.

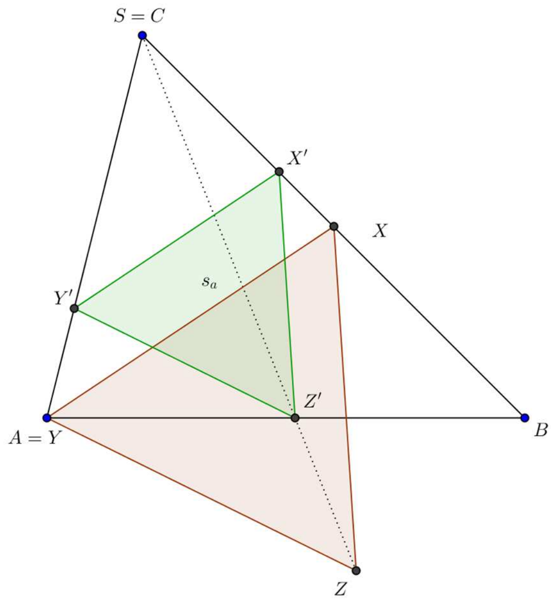
Konstruktionsbeschreibung:
Zunächst wird ein Dreieck XYZ konstruiert mit X auf AC und Y auf AB, dessen Seite XY parallel zur Höhe h_c liegt. Dann wird dieses Dreieck mit Zentrum S = A so gestreckt, dass Z´ auf BC zu liegen kommt.

Weitere Lösungen mit XY parallel zu h_a bzw. h_b.



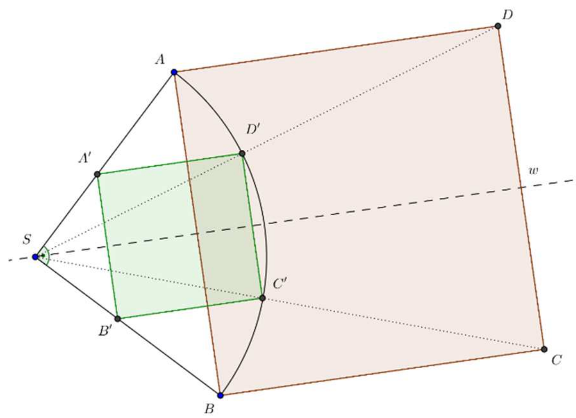
Übungsaufgaben:

1.
Dem Dreieck ABC ist ein gleichseitiges Dreieck so einzubeschreiben, dass eine Seite parallel zur Seitenhalbierenden s_a verläuft.



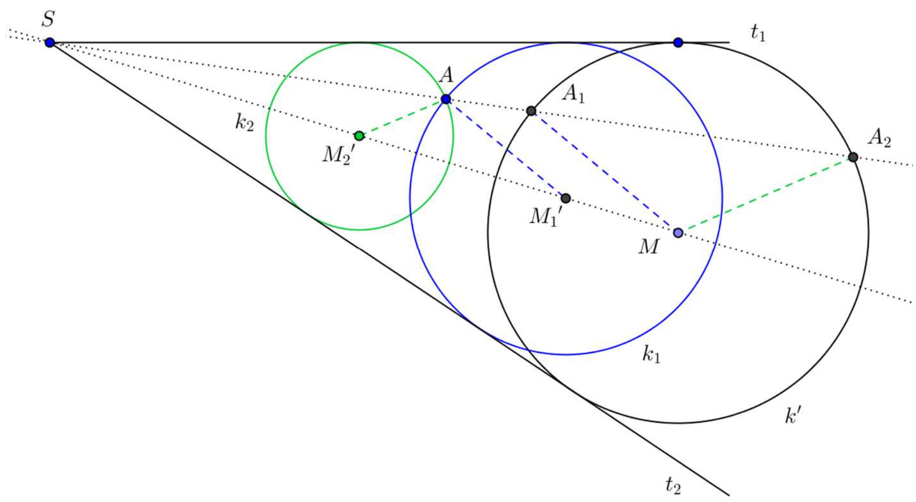
Konstruktionsbeschreibung:
Mit der Seitenhalbierenden s_a als Seite kann ein gleichseitiges Dreieck XYZ konstruiert werden. Dieses Dreieckwird mit wird mit Zentrum S = C so gestreckt, dass der Bildpunkt Z auf c = AB zu liegen kommt.

2.
In einen Viertelskreis ist ein Quadrat so einzubeschreiben, dass zwei Ecken auf dem Bogen liegen.



Konstruktionsbeschreibung:
Konstruiere ein zur Winkelhalbierenden w symmetrisches Quadrat A'B'C'D'
Strecke dieses Quadrat mit Zentrum S so, dass der Bildpunkt D von D' auf den Sektorbogen zu liegen kommt.

Aufgabe:
Es ist ein Kreis zu konstruieren, der zwei sich schneidende Geraden t_1 und t_2 berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht.



Konstruktionsbeschreibung:
Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen auf der Winkelhalbierenden von t_1 und t_2. Zunächst wird ein Kreis k mit Mittelpunkt M konstruiert, der die beiden Geraden t_1 und $t_2$berührt. Dieser Kreis wird mit Zentrum S so gestreckt, dass der Bildkreis durch A geht. A kann als Bildpunkt von A_1 oder A_2 aufgefasst werden. Die gesuchten Mittelpunkte der beiden blau bzw. grün dargestellten Lösungskreise ergeben sich aus den eingezeichneten Radien.

Die Aufgabe ist ein Spezialfall des sogenannten Apollonischen Berührungsproblems:

Es handelt sich um die Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt. Wir betrachten Spezialfälle, bei denen gewisse der gegebenen Kreise zu Punkten (0)oder Geraden (∞) ausgeartet sind.

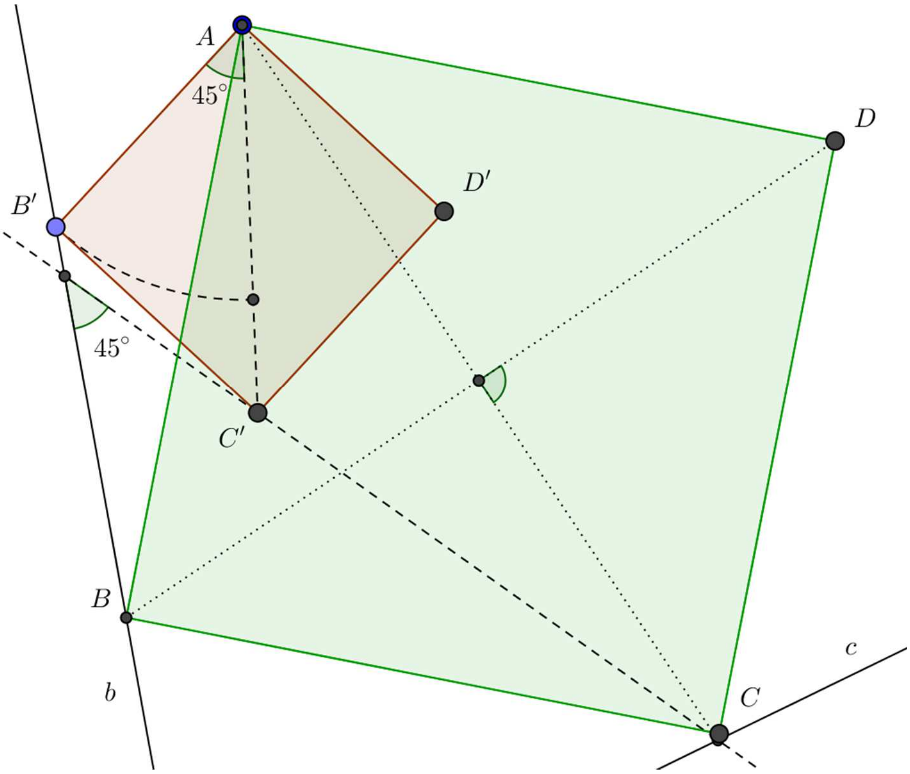
1.	r	r		(allgemeiner Fall)	6.	r	0	∞	
2.	r	r	∞		7.	∞	0	0	
3.	r	r	0		8.	∞	∞	0	
4.	r	0	0		9.	∞	∞	∞	(In-/Ankreis)
5.	r	∞	∞		10.	0	0	0	(Umkreis)

Übungsaufgabe ∞ 0 0 (siehe 7.)
Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte A und B geht und eine Gerade g berührt.

Konstruktionsbeschreibung
M liegt auf der Mittelsenkrechten *l* von AB. Der Schnittpunkt von *l* mit g ist das Streckungszentrum.

Die folgende Aufgabe kann mit einer Drehstreckung gelöst werden. Eine Drehstreckung ist die Zusammensetzung einer Rotation mit Zentrum S und einer zentrischen Streckung mit demselben Zentrum.

Aufgabe: Gegeben ist ein Punkt A und die beiden Geraden b und c, Es ist ein Quadrat zu konstruieren mit der Ecke A, dessen Ecke B auf b bzw. C auf c liegen.



Konstruktionsbeschreibung:
Zunächst wird auf b ein Punkt B´ gewählt und das Quadrat AB´C´D´ konstruiert. C´ kann als Bild des Punktes B´ bei einer Drehung um A mit dem Winkel 45° und einer zentrischen Streckung mit dem Faktor $\sqrt{2}$ aufgefasst werden. Bei dieser Drehstreckung wird die Gerade b in eine Gerade durch C´ abgebildet, die mit b den Winkel 45° einschliesst. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden c ist die gesuchte Quadratecke C. Die übrigen Quadratecken liegen auf der Mittelsenkrechten von AC.