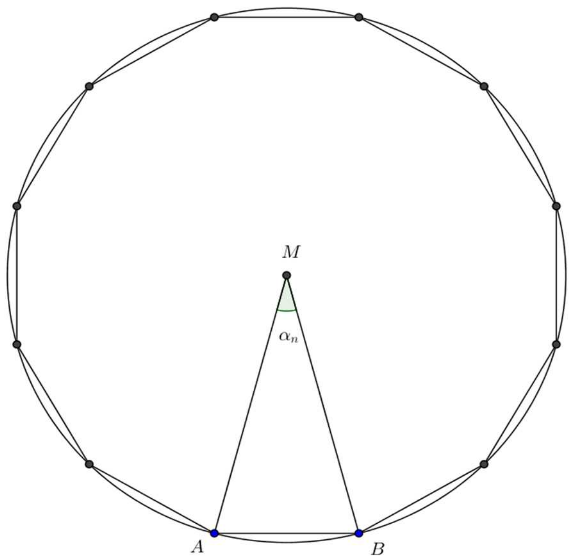
11. Reguläre Vielecke und Körper

Teilt man die Kreislinie in n gleiche Teile und verbindet benachbarte Teilpunkte, so entsteht ein reguläres n-Eck (Polygon).

Schon Euklid von Alexandria hat sich um 300 v. Chr. im 4. Buch (von 13) seiner „Elemente“ mit der Frage auseinandergesetzt, welche regulären Vielecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Er hat bereits die Konstruierbarkeit u.a. des regulären 5-Ecks nachgewiesen.

Die Konstruierbarkeit des n-Ecks ist gleichbedeutend mit der Konstruktion eines Bestimmungsdreiecks des regulären n-Ecks mit dem Winkel

$$\alpha_n = \frac{360°}{n}$$



Beispiel:
Bestimmungsdreieck MAB des regulären 12-Ecks.

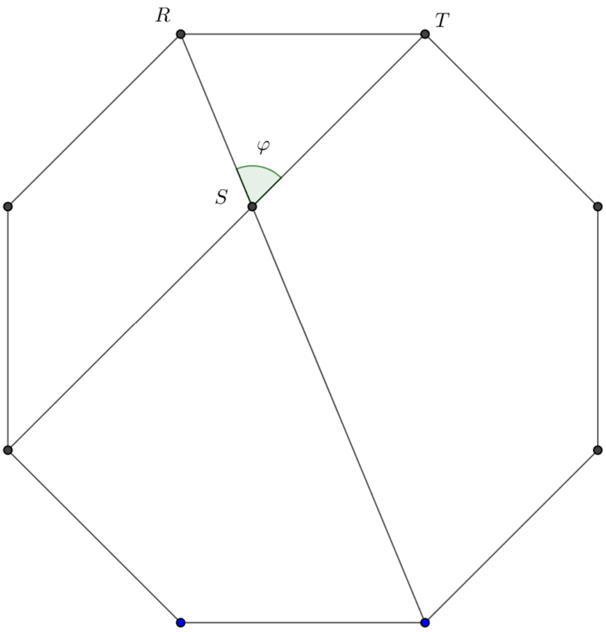
$$\alpha_{12} = \frac{360°}{12} = 30°$$

Übungsaufgaben:

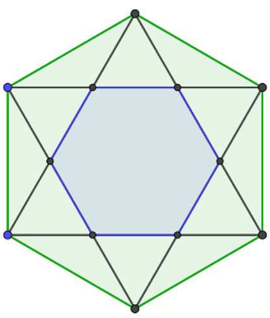
1.
Welchen Winkel γ_n schliessen zwei benachbarte Seiten im regulären n-Eck ein?

2.
Wie gross ist im regelmässigen Achteck der Schnittwinkel φ der beiden Diagonalen?

3.
Die Seiten des regulären Sechsecks ABCDEF sind 10 cm lang. Wie gross ist die Länge der beiden Diagonalen AC?



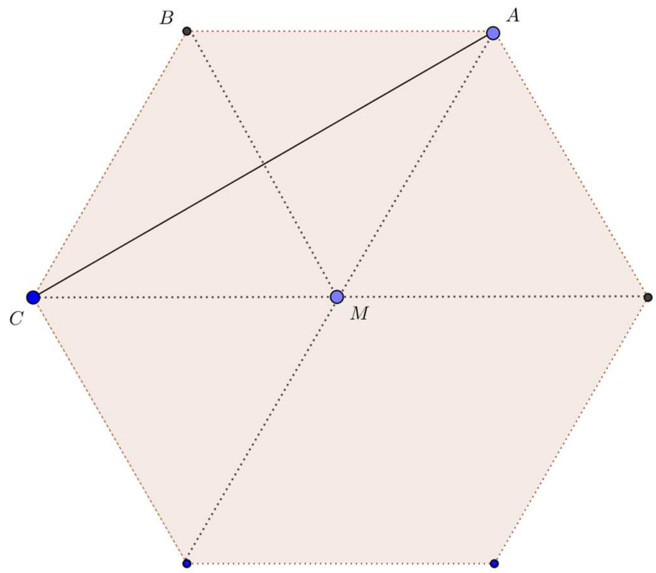
4.
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der beiden Sechsecke?



Lösungen:
1.
Der gesuchte Winkel ist gerade gleich der Summe der beiden Basiswinkel im Bestimmungsdreieck:

$$180-\alpha_n = 180-\frac{360}{n} = 180\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

2.
Das Bestimmungsdreieck des regulären Achtecks und das Dreieck RST sind gleichschenklig und ähnlich. Der Schnittwinkel φ ist somit gleich gross wie der Basiswinkel im Bestimmungsdreieck
$\varphi = 67.5°$



3.
Zeichnet man zwei benachbarte Bestimmungsdreiecke, dann erkennt man, dass die Länge gerade gleich der doppelten Höhe im regulären Sechseck ist: $10\cdot\sqrt{3}$ cm
4.
1 : 3

Die Konstruktion des regulären Zehnecks führt auf die sogenannte Teilung einer Streckung nach dem Goldenen Schnitt.

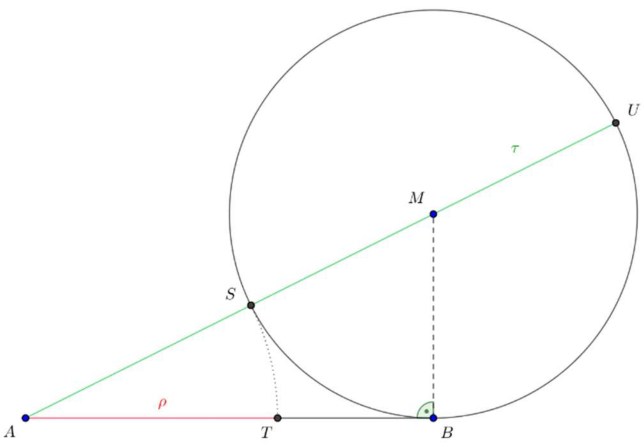
Der Goldene Schnitt (stetige Teilung)

Johannes Kepler (1571-1630) bezeichnete diese Teilung als göttliche Proportion („sectio divina“), die dem Schöpfer als Idee gedient hat.
Der Goldene Schnitt hat Mathematiker und Künstler seit Jahrhunderten beschäftigt (siehe Beispiele in der antiken, romanischen, Renaissance-Architektur, in Bildern und Skulpturen)
Ausserdem begegnet man dem goldenen Schnitt in der Natur bei der Anordnung von Blättern an Pflanzenstengeln (siehe auch Fibonaccifolge).

Literatur:
H. Walser: Der goldene Schnitt
Adam P., Wyss A.: Platonische und archimedische Körper, Haupt Bern 1984

Definition:
Eine Strecke heisst stetig oder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn sich der kleinere Abschnitt zum grösseren verhält, wie der grössere Abschnitt zur ganzen Strecke.

Bezeichnungen:
AT: grösserer Abschnitt (Major)
BT: kleinerer Abschnitt (Minor).



$$\frac{\overline{BT}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AB}} = \rho \qquad (1)$$

Sei $\overline{AB} = 1$ und $\overline{AT} = \rho$ dann gilt:

$$\frac{1-\rho}{\rho} = \frac{\rho}{1}$$

oder

$$\rho^2 + \rho - 1 = 0$$

Die Lösungen ergeben sich mit der quadratischen Auflösungsformel zu:

$$\rho_{1,2} = \tfrac{1}{2} \cdot (-1 \pm \sqrt{5})$$

Da $\rho_2 < 0$ heisst die gesuchte Lösung

$$\rho = \tfrac{1}{2} \cdot (-1 + \sqrt{5}) \approx 0.61803$$

Sie kann gemäss der Abbildung nach Pythagoras konstruiert werden.
Wählt man $\overline{BM} = \frac{1}{2}$ dann gilt nach Pythagoras

$$\overline{AM} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ also}$$

$$\rho = \overline{AS} = \overline{AT} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

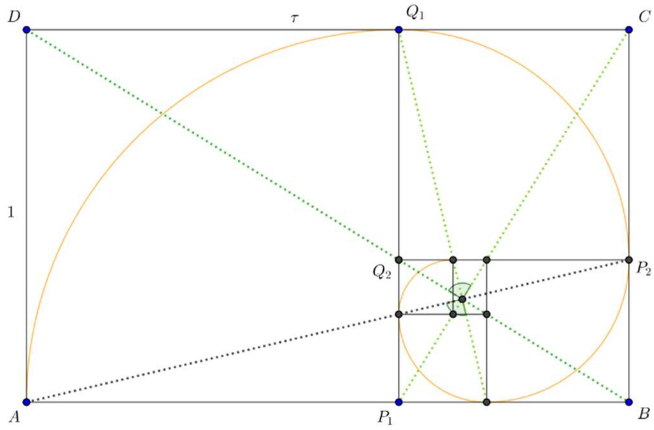
Das umgekehrte Verhältnis $\frac{1}{\rho}$ von (1) wird mit τ bezeichnet.

Nach dem Tangentensatz gilt in der Figur $\overline{AS} \cdot \overline{AU} = \overline{AB}^2 = 1^2 = 1$ oder

$$\overline{AU} = \frac{1}{\overline{AS}} = \frac{1}{\overline{AT}} = \frac{1}{\rho} = \tau$$

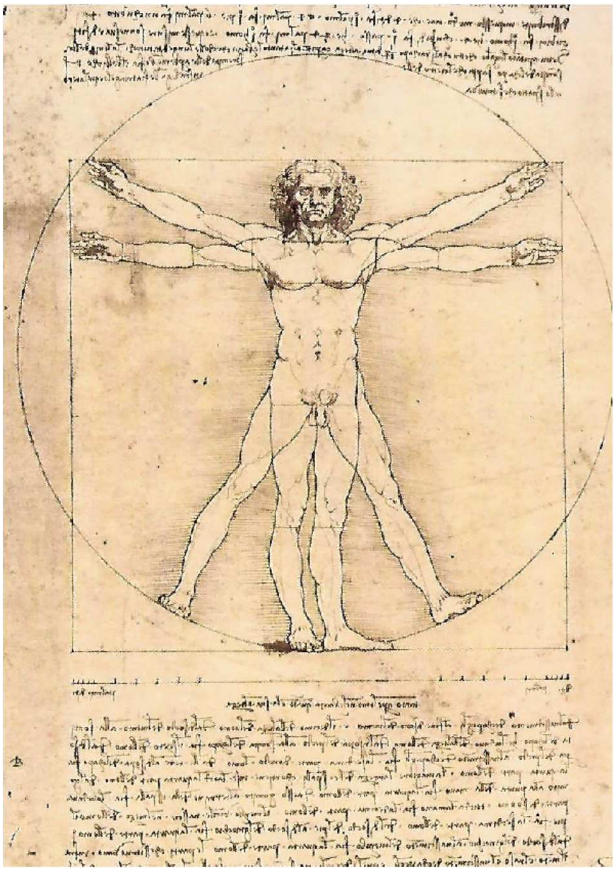
Wegen $\overline{AU} = \overline{AS} + \overline{SU} = \overline{AT} + \overline{SU} = \rho + 1$ gilt damit auch $\tau = 1 + \rho$

Ein Rechteck, bei dem das Verhältnis der Länge zur Breite dem goldenen Schnitt entspricht, heisst **goldenes Rechteck** (das Verhältnis Länge zu Breite ist also gerade τ).
Schneidet man im goldenen Rechteck ABCD mit den Seiten 1 und τ das Quadrat AP_1Q_1D ab, dann ist das Restrechteck P_1BCQ_1 wieder ein goldenes, denn es ist zum Ausgangs-rechteck ähnlich. Dann fahren wir so fort usw. Die Quadrate bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten ρ. Zeichnet man in die Quadrate Viertelkreise so entsteht eine Spirale, welche eine gute Approximation der logarithmischen Spirale ist (vgl. Coxeter: Unvergängliche Geometrie).



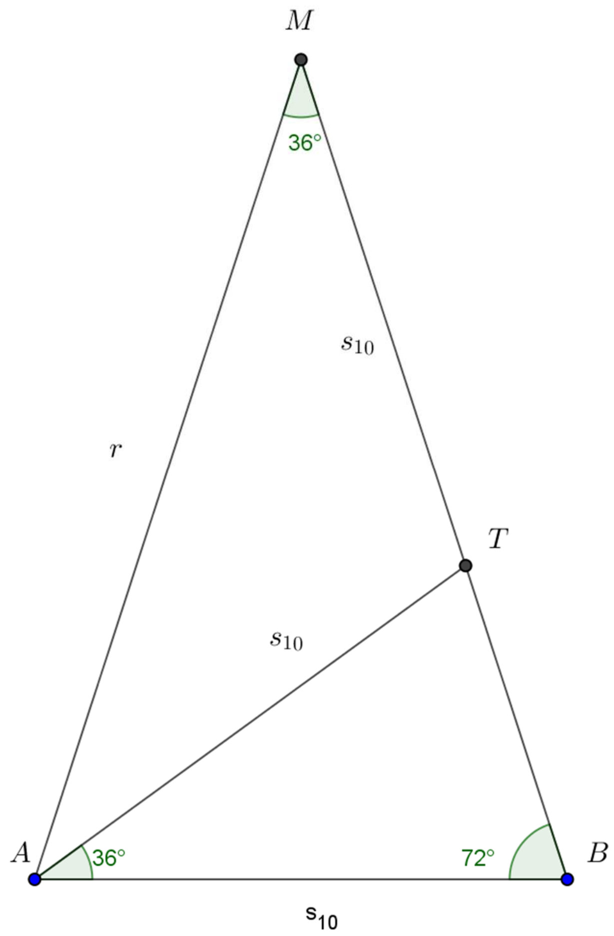
Die auf der Startseite abgebildete Briefmarke stellt ebenfalls die goldene Spirale dar. Weitere Informationen auf den Websites
http://homepages.fh-friedberg.de/boergens/marken/liste.htm
oder
http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt

Leonardo: Proportionen des menschlichen Körpers (Louvre)



Im Folgenden wird gezeigt, dass der goldene Schnitt auch bei der Konstruktion des regulären Zehnecks zur Lösung führt.

Konstruktion des regulären Zehnecks



Zeichnet man im Bestimmungsdreieck MAB des regulären Zehnecks die Winkelhalbierende eines Basiswinkels, so entsteht das Dreieck ABT, das zum Bestimmungsdreieck ABM ähnlich ist (die beiden Dreiecke stimmen in zwei Winkeln überein). Da die beiden Dreiecke gleichschenklig sind, gilt ausserdem:

$$\overline{AB} = \overline{AT} = \overline{MT} = s_{10}$$

Aus der Ähnlichkeit folgt, dass in beiden Dreiecken das Verhältnis der Basis zum Schenkel übereinstimmt:

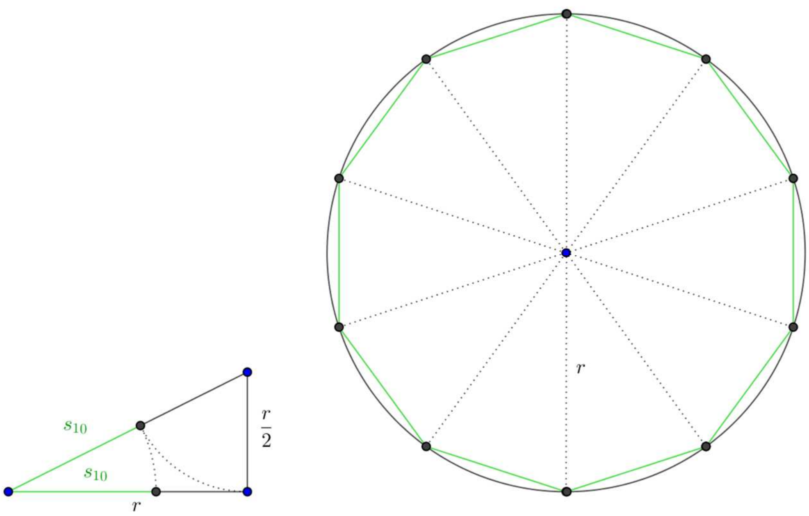
$\dfrac{\overline{BT}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{MB}}$ und wegen

$\overline{AB} = \overline{AT} = \overline{MT} = s_{10}$ und $\overline{MB} = r$

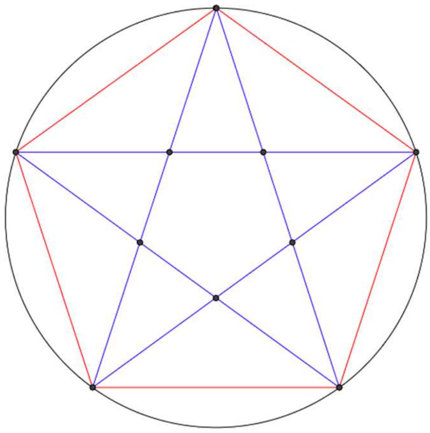
$$r - s_{10} : s_{10} = s_{10} : r$$

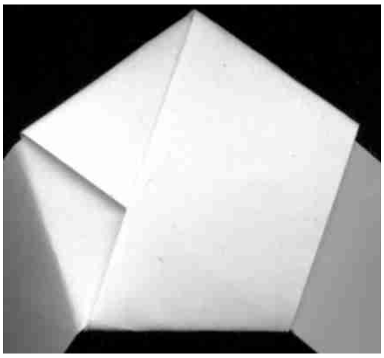
Das Problem ein reguläres Zehneck zu konstruieren ist damit darauf zurückgeführt, den Umkreisradius $\overline{MB}$ nach dem goldenen Schnitt zu teilen.

Satz:
Die Seite des regulären Zehnecks ist der grössere Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Umkreisradius.



Damit ergibt sich unmittelbar auch die Konstruktion des regulären Fünfecks bzw. des Drudenfusses (Pentagramm).





Es ist verblüffend, dass ein regelmässiges Fünfeck entsteht, wenn man mit einem langen Papierband einen einfachen Knoten bildet.

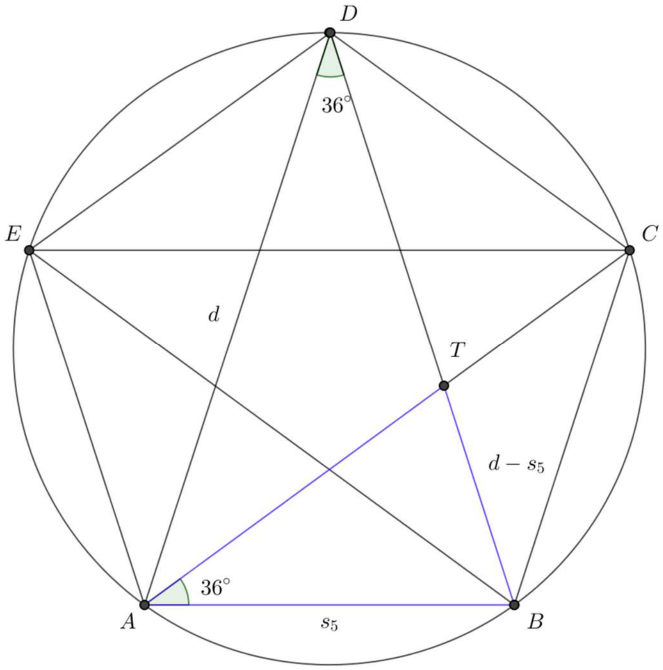
Der abgebildete Seestern hat die Form eines Sternfünfecks, der Gebäudekomplex des amerikanischen Verteidigungsministeriums heisst Pentagon.

Weitere Konstruktionen des regulären Fünfecks

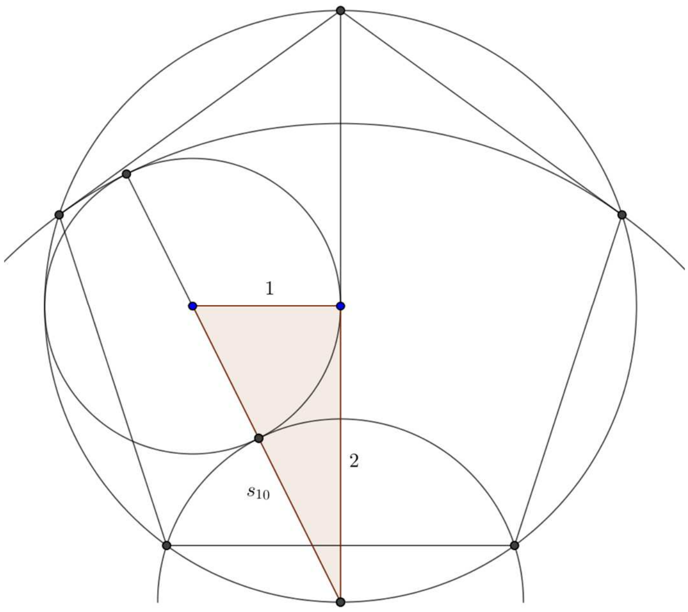
> Satz:
> Die Fünfeckseite ist der grössere Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Diagonale.

Beweis:
Die gleichschenkligen Dreiecke ABT (blau gefärbt) und ABD sind zueinander ähnlich. Aus der Ähnlichkeit folgt, dass in beiden Dreiecken das Verhältnis von Basis zum Schenkel gleich gross ist:

$$\frac{d_5 - s_5}{s_5} = \frac{s_5}{d_5}$$

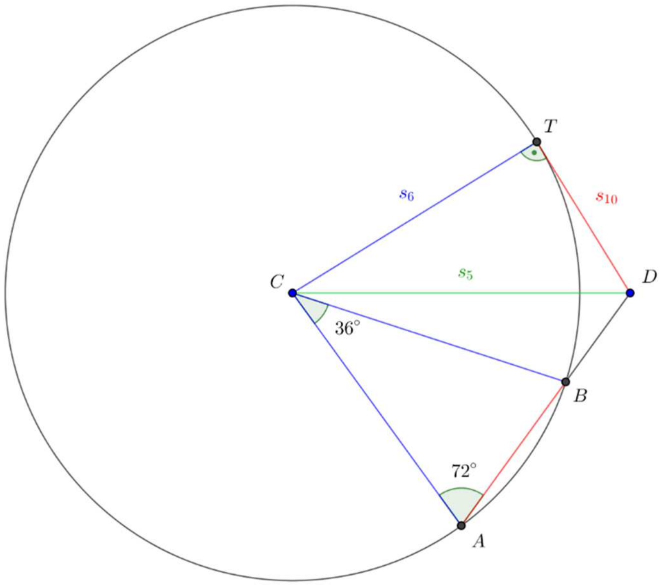


Die folgende Konstruktion hat den Vorteil, dass man die Seitenlänge nicht mehrfach abtragen muss.



Satz von Eudoxus:
Die Seiten des regelmässigen Fünf-, Sechs- und Zehnecks bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Fünfeckseite als Hypotenuse.

Da $\overline{AB}$ eine Seite des regelmässigen Zehnecks ist, misst der Winkel bei A 72°. D ist so konstruiert, dass $\overline{AD}$ und $\overline{AC}$ gleich lang sind. Damit gilt:
$\overline{AD} = r = s_6$



Da das Dreieck ACD mit einem 72°-Winkel an der Spitze gleichschenklig ist, ist $\overline{CD}$ gleich lang wie die Seite des regelmässigen Fünfecks.

Nach dem Sekantensatz gilt: $\overline{DT}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DA}$

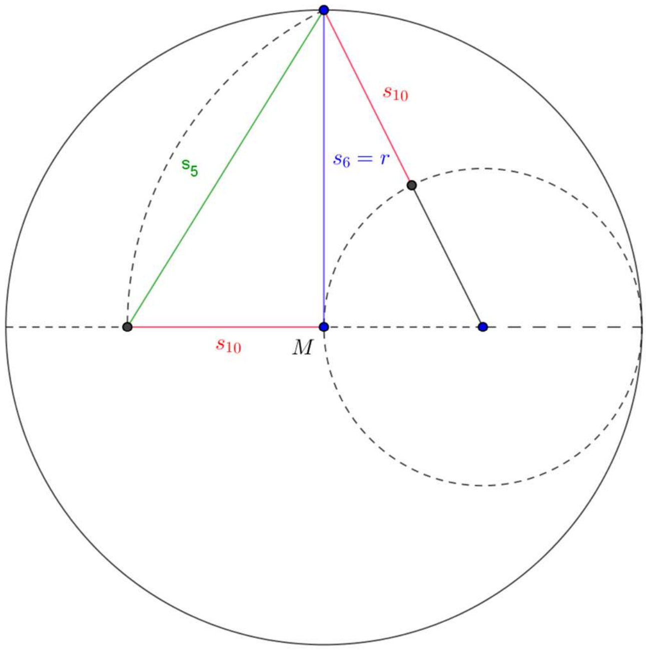
Da die Seite des regelmässigen Zehnecks den Radius stetig teilt, gilt auch: $\overline{AB}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DA}$

Folglich sind $\overline{AB}$ und $\overline{DT}$ gleich lang. Damit gilt im rechtwinkligen Dreieck CTD:

$$\overline{DT} = \overline{AB} = s_{10}$$
$$\overline{CT} = \overline{AC} = \overline{AD} = r = s_6$$
$$\overline{CD} = s_5$$

Nach dem Pythagoras gilt also:
$s_6^2 + s_{10}^2 = s_5^2$

Durchführung der Konstruktion nach dem griechischen Mathematiker und Astronomen Claudios Ptolemaios von Alexandria (ca. 85-165)



Dem berühmten Mathematiker Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) ist es bereits im Alter von 19 Jahren gelungen, den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen. Er macht eine Aussage über die Konstruierbarkeit von Vielecken:

Satz:
Das regelmässige n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn gilt:
a) n ist eine Primzahl der Form $n = 2^{2^p} + 1$ p = 0, 1, 2, 3, …
d.h. n ist eine sogenannte Fermat'sche Primzahl
b) n ist Produkt verschiedener Fermat'scher Primzahlen und einer Potenz von 2
c) n ist eine Potenz von 2

p	n
0	3
1	5
2	17
3	257
4	65 537
5	4 294 697 297 = 641·6 700 417 da diese Zahl keine Primzahl ist, ist dieses n-Eck nicht konstruierbar. Bisher ist keine weitere Fermat'sche Primzahl bekannt.

Konstruierbar sind also die n-Ecke für n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17,…

Goldener Schnitt und reguläre Körper

Die fünf platonischen Körper sind aus regelmässigen Drei-, Vier-, und Fünfecken aufgebaut.

Insbesondere für diese Körper gilt der sogenannte

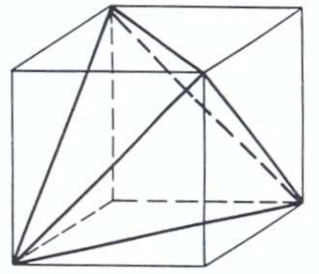
Eulersche Polyedersatz:

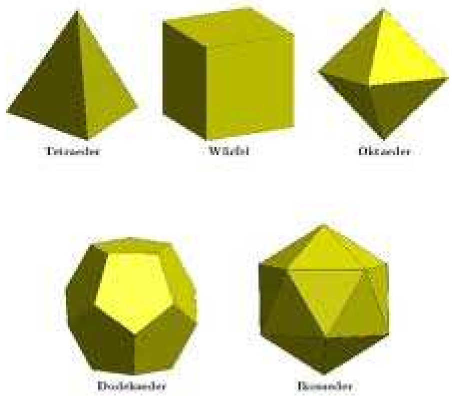
Für beschränkte, konvexe Polyeder mit der Anzahl der Ecken e, der Anzahl Flächen f und der Anzahl Kanten k gilt:
$e+f-k=2$

Aus dem Satz lässt sich herleiten, dass es nicht mehr als fünf platonische Körper geben kann.

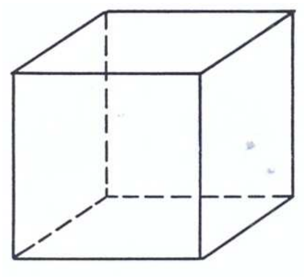
Das Tetraeder

e = 4, f = 4, k = 6

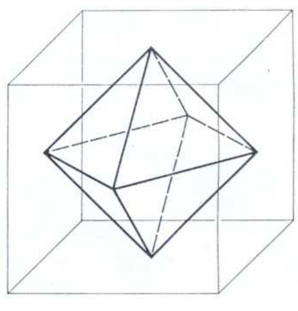




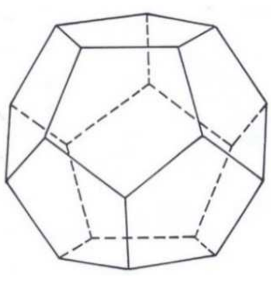
Der Würfel
e = 8, f = 6, k = 12



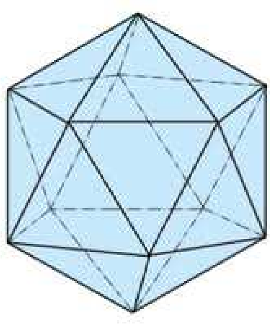
Das Oktaeder
e = 6, f = 8, k = 12



Das Dodekaeder
e = 20, f = 12, k = 30



Das Ikosaeder
e = 12, f = 20, k = 30



Ein Beweis (Quelle unbekannt)

Während die systematische Entwicklung der Topologie kaum hundert Jahre alt ist, hat es schon früher Einzelentdeckungen gegeben, die später in dem modernen systematischen Ausbau ihren Platz gefunden haben. Bei weitem die wichtigste unter diesen ist eine Formel, die die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen eines einfachen Polyeders miteinander in Beziehung setzt, und die bereits 1640 von DESCARTES gefunden und 1752 von EULER wiederentdeckt und benutzt wurde. Der typische Charakter dieser Beziehung als topologisches Theorem wurde erst viel später klar, als POINCARÉ die ,,Eulersche Formel" und ihre Verallgemeinerungen als einen der zentralen Sätze der Topologie erkannte. Daher wollen wir sowohl aus historischen wie aus sachlichen Gründen unsere Diskussion der Topologie mit der Eulerschen Formel beginnen. Da das Ideal vollkommener Strenge bei den ersten Schritten in ein ungewohntes Gebiet weder notwendig noch erwünscht ist, werden wir uns nicht scheuen, von Zeit zu Zeit an die geometrische Anschauung zu appellieren.

§ 1. Die Eulersche Polyederformel

Obwohl das Studium der Polyeder in der griechischen Mathematik einen zentralen Platz einnahm, blieb es DESCARTES und EULER vorbehalten, die folgende Tatsache zu entdecken: In einem einfachen Polyeder möge E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen bedeuten. Dann ist immer

$$(1) \qquad E - K + F = 2\,.$$

Unter einem *Polyeder* wird ein Körper verstanden, dessen Oberfläche aus einer Anzahl polygonaler Flächen besteht. Im Falle eines regulären Körpers sind die Polygone alle kongruent, und an jeder Ecke des Körpers stoßen gleich viele Kanten zusammen. Ein Polyeder heißt *einfach*, wenn es keine ,,Löcher" hat, so daß also seine Oberfläche sich stetig in eine Kugelfläche deformieren läßt. Fig. 120 zeigt ein einfaches Polyeder, das nicht regulär ist, und Fig. 121 ein Polyeder, das nicht einfach ist.

Der Leser möge nachprüfen, daß die Eulersche Formel für die einfachen Polyeder der Figuren 119 und 120, nicht aber für das Polyeder der Fig. 121 zutrifft.

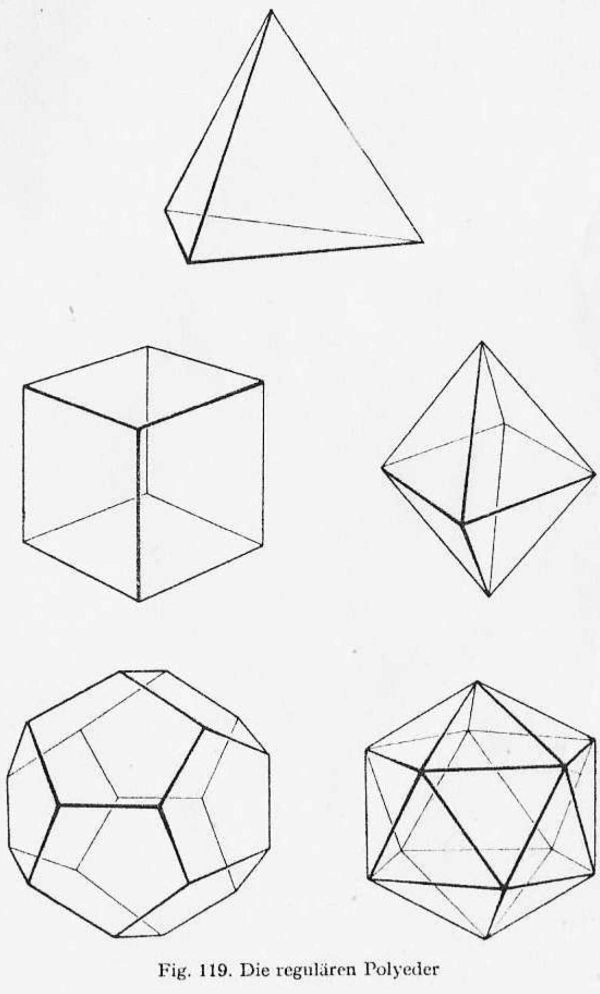


Fig. 119. Die regulären Polyeder

Um die Eulersche Formel zu beweisen, stellen wir uns vor, daß das gegebene einfache Polyeder hohl ist, mit einer Oberfläche aus Gummihaut. Wenn wir dann eine der Flächen des hohlen Polyeders herausschneiden, können wir die übrige Oberfläche so stark deformieren, daß sie schließlich flach in einer Ebene liegt. Natürlich haben sich dabei die Flächen und die Winkel zwischen den Kanten des Polyeders verändert. Aber das Netz der Ecken und Kanten in der Ebene wird genau dieselbe Anzahl von Ecken und Kanten enthalten wie das ursprüngliche Polyeder, während die Zahl der Polygone um eins kleiner ist als bei dem

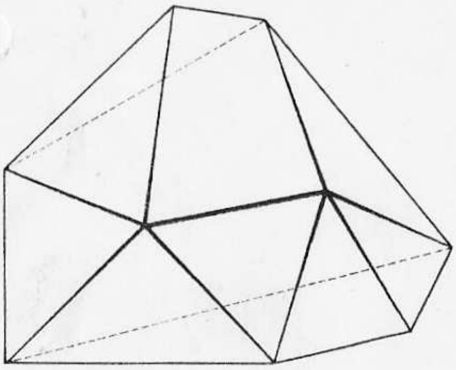


Fig. 120. Ein einfaches Polyeder.
$E - K + F = 9 - 18 + 11 = 2$

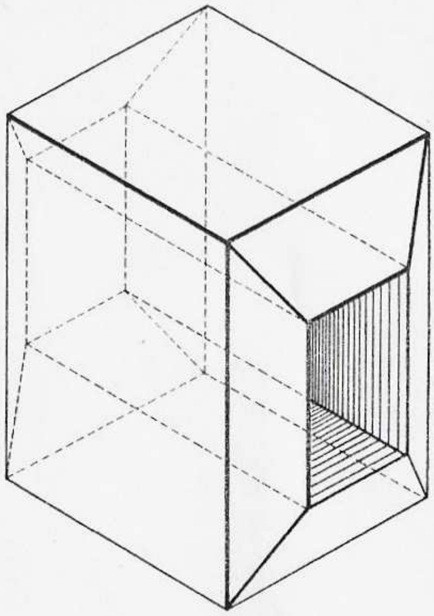


Fig. 121. Ein nicht-einfaches Polyeder.
$E - K + F = 16 - 32 + 16 = 0$

ursprünglichen Polyeder, da ja eine Fläche weggeschnitten worden ist. Wir werden nun zeigen, daß für das ebene Netz $E - K + F = 1$ ist, so daß, wenn die herausgeschnittene Fläche mitgezählt wird, $E - K + F = 2$ für das ursprüngliche Polyeder herauskommt.

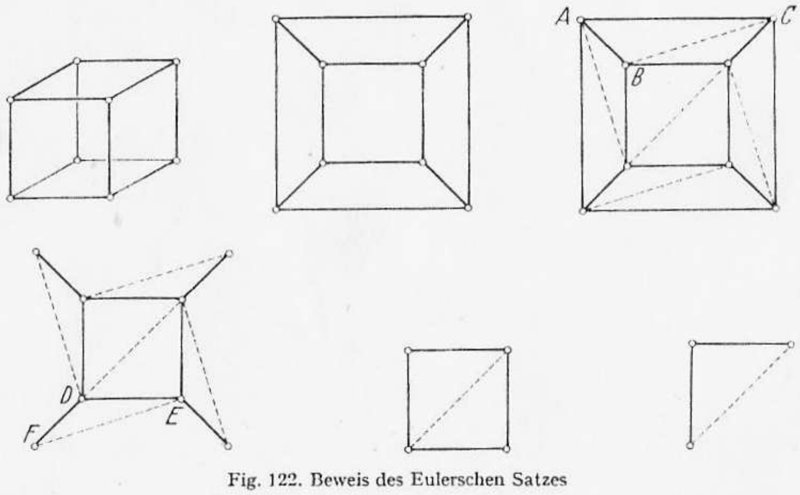


Fig. 122. Beweis des Eulerschen Satzes

Zunächst „triangulieren" wir das ebene Netz folgendermaßen: in einem der Polygone, das nicht bereits ein Dreieck ist, ziehen wir eine Diagonale. Dies hat die Wirkung, daß sowohl K wie F sich um eins vermehren, so daß also der Wert von

$E - K + F$ erhalten bleibt. Wir fahren fort, Diagonalen zu ziehen, die jedesmal zwei Punkte verbinden (Fig. 122), bis die Figur aus lauter Dreiecken besteht, was ja schließlich einmal eintreten muß. In dem triangulierten Netz hat $E - K + F$ denselben Wert wie zu Anfang, da das Ziehen der Diagonalen ihn nicht ändert.

Einige der Dreiecke haben Kanten auf der Randlinie des ebenen Netzes. Von diesen haben einige, wie ABC, nur eine Kante auf der Randlinie, während andre Dreiecke zwei Kanten auf ihr haben können. Wir wählen irgendein Randdreieck und entfernen von ihm alles, was nicht zugleich zu anderen Dreiecken gehört. Also nehmen wir von ABC die Kante AC und die Fläche weg, lassen also die Ecken A, B, C und die beiden Kanten AB und BC übrig. Von DEF dagegen nehmen wir die Fläche, die beiden Kanten FD und FE sowie die Ecke F weg. Das Entfernen des Dreiecks ABC vermindert K und F je um 1, während E nicht geändert wird, so daß $E - K + F$ gleich bleibt. Das Entfernen eines Dreiecks vom Typus DEF vermindert E um 1, K um 2 und F um 1, so daß $E - K + F$ wiederum gleich bleibt. In einer passend gewählten Folge solcher Operationen entfernen wir stets Dreiecke mit Kanten auf der Randlinie (die sich bei jeder Operation verändert), bis zuletzt nur noch ein Dreieck mit drei Kanten, drei Ecken und einer Fläche übrig ist. Für dieses einfachste Netz ist $E - K + F = 3 - 3 + 1 = 1$. Wir sahen aber, daß durch das Fortnehmen von Dreiecken die Größe $E - K + F$ sich nicht ändert. Daher muß auch in dem ursprünglichen, ebenen Netz $E - K + F = 1$ gewesen sein, und das gleiche gilt für das Polyeder mit einer herausgeschnittenen Fläche. Wir erkennen so, daß für das vollständige Polyeder $E - K + F = 2$ gilt. Damit ist der Beweis für die Eulersche Formel erbracht [siehe (56) (57) S. 381].

Auf Grund der Eulerschen Formel beweist man leicht, daß es nicht mehr als fünf reguläre Polyeder gibt. Dazu nehmen wir an, ein reguläres Polyeder habe F Flächen, deren jede ein reguläres n-Eck ist, und an jeder Ecke treffen r Kanten zusammen. Zählen wir dann die Kanten einmal nach den Flächen und einmal nach den Ecken ab, so sehen wir, daß einerseits

$$nF = 2K, \tag{2}$$

da jede Kante zu zwei Flächen gehört (und daher in dem Produkt nF doppelt gezählt wird), und andererseits

$$rE = 2K, \tag{3}$$

da jede Kante zu 2 Ecken gehört. Also erhalten wir aus (1) die Gleichung

$$\frac{2K}{r} + \frac{2K}{n} - K = 2$$

oder

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K}. \tag{4}$$

Wir wissen von vornherein, daß $n \geqq 3$ und $r \geqq 3$, da ein Polygon mindestens drei Seiten haben muß und an jedem Polyedereckpunkt mindestens 3 Flächen zusammentreffen müssen. Aber n und r können nicht *beide größer* als drei sein, denn dann könnte die linke Seite von (4) nicht größer als $\frac{1}{2}$ sein, was jedoch bei jedem positiven Wert von K der Fall sein muß. Wir brauchen also nur zu untersuchen, welche Werte r haben kann, wenn $n = 3$ ist, und welche Werte n haben kann, wenn $r = 3$ ist.

Für $n = 3$ geht Gleichung (4) über in

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{K};$$

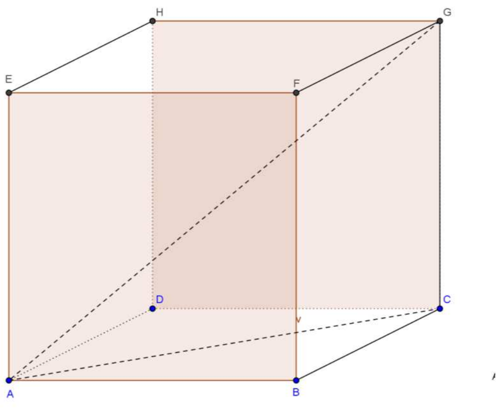
r kann also gleich 3, 4 oder 5 sein. (6 oder jede größere Zahl ist offenbar ausgeschlossen, da $1/K$ immer positiv sein muß.) Für diese Werte erhalten wir $K = 6$, 12 oder 30, was dem Tetraeder bzw. Oktaeder oder Ikosaeder entspricht.

Ebenso erhalten wir für $r = 3$ die Gleichung

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{K},$$

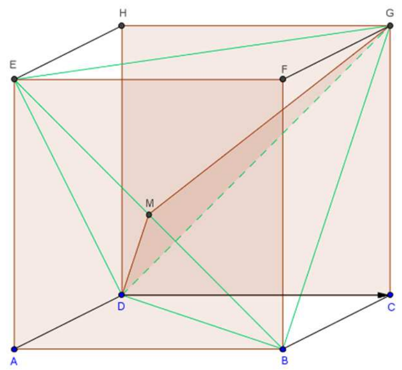
woraus sich ergibt, daß $n = 3$, 4 oder 5 und $K = 6$, 12 oder 30 sein kann. Diese Werte entsprechen dem Tetraeder bzw. dem Würfel oder dem Dodekaeder. Setzen wir die gefundenen Werte für n, r und K in die Gleichungen (2) und (3) ein, so erhalten wir die Anzahl der Ecken und Flächen der entsprechenden Polyeder.

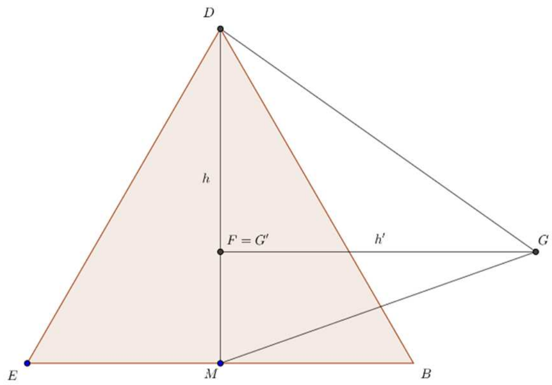
1. Der Würfel (Hexaeder)



2. Das Tetraeder

Das Tetraeder wird von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Es kann durch Verbinden geeigneter Ecken eines Würfels dargestellt werden.





In der Abbildung rechts ist der Grundriss des Tetraeders BDEG mit der Grundfläche BDE in der xy-Ebene dargestellt. Legt man einen geeigneten Schnitt in die Grundebene um, so entsteht das gleichschenklige Dreieck MDG, wobei die Tetraederseite gleich der Flächendiagonalen des links dargestellten Würfels ist. Wählen wir als Tetraederkante 2 dann gilt für die Höhe des gleichseitigen Dreiecks:

$h = \overline{MD} = \sqrt{3}$

Der Fusspunkt F‘ ist der Schnittpunkt der Höhen (auch Seitenhalbierenden). Die Tetraederhöhe h´ ist gleich der Strecke $\overline{FG}$.

Anwendung (vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Tetra_Pak,
Film: http://www.tetrapak.com/chde/about/history):
Öffnet man eine Tüte in Tetraederform entlang ihrer Klebekanten, so entsteht überraschenderweise ein Rechteck. Verklebt man die beiden Breiten so entsteht ein Zylindermantel. Die Randkreise des Zylinders werden zu Kanten verklebt, die senkrecht zueinander stehen. Es lohnt sich den Produktionsprozess in einem Milchbetrieb zu verfolgen.

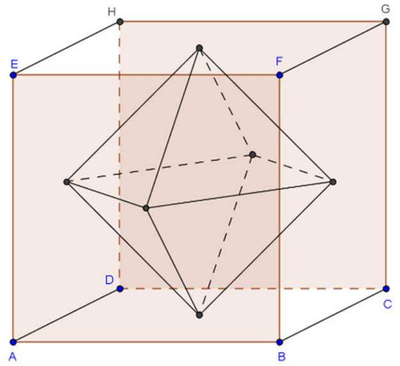
Übungsaufgabe:
a)
Wie kann die Volumenformel für das reguläre Tetraeder hergeleitet werden?
b)
Welche Kantenlänge hat eine Milchtüte in Tetraederform, die 250 cm^3 enthält?

Lösungen:
a)
Flächeninhalt eines Tetraederdreiecks: $A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$
Wegen $\overline{DF} = \frac{2}{3}\overline{DM}$ ergibt sich die Tetraederhöhe zu: $h' = : A = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$
Tetraedervolumen: $A = \frac{1}{12}\sqrt{2}a^3$
b)

$$a = \sqrt[3]{\frac{3000}{\sqrt{2}}} \approx 12.5cm$$

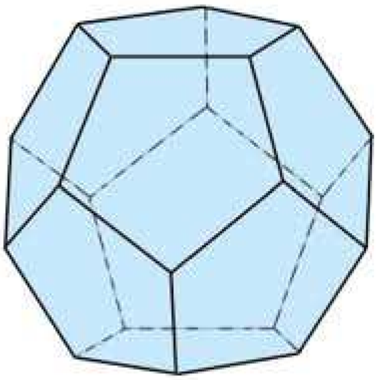
3. Das reguläre Oktaeder

Das Oktaeders wird von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Die Mitten der sechs Seitenflächen des Würfels bilden ein reguläres Oktaeder.



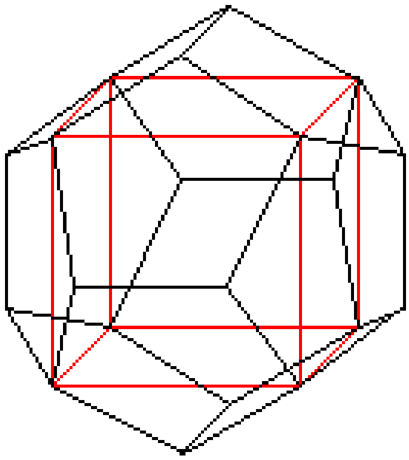
4. Das reguläre Dodekaeder

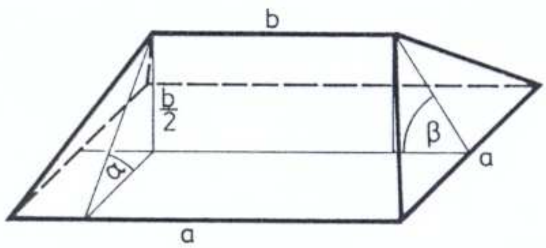
Auszug aus: Bilder der Mathematik Georg Glaeser, Konrad Polthier
http://www.symmetrie.info/downloads/begleittext_symmetrie_ausstellung.pdf



Konstruktion des Dodekaeders

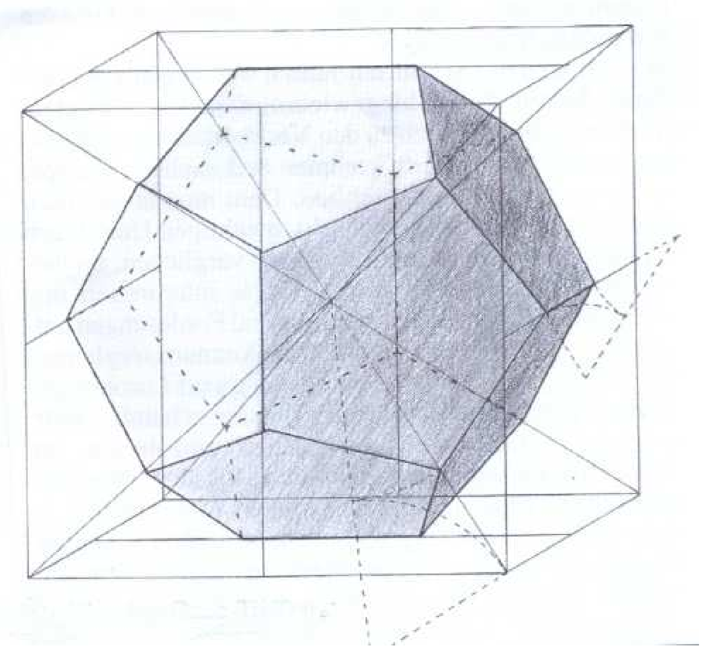
Ein Dodekaeder kann so konstruiert werden, dass man einem Würfel der Kantenlänge a kongruente Walmdächer aufsetzt, wie in der Abbildung dargestellt. Die Firstlänge b und die Höhe h sind so zu bestimmen, dass die auftretenden Fünfecke regulär sind





Es kann gezeigt werden, dass die Firstlänge b gerade gleich dem grössten Abschnitt der stetig geteilten Würfelkante ist und die Firsthöhe gleich der halben Firstlänge.

Wie die Figur zeigt kann ein Dodekaeder auch einem Würfel einbeschrieben werden.
(Quelle unbekannt)

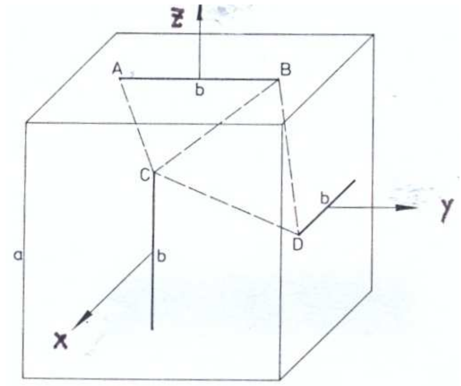


5. Das Ikosaeder

Wird einem Würfel ein Ikosaeder einbeschrieben, so tritt dabei ebenfalls der Goldene Schnitt auf.

Konstruktion des Ikosaeders in einem zum Ursprung symmetrischen Einheitswürfel:

In den Würfelflächen werden Mittelstrecken der Länge b gezeichnet, wobei diese in benachbarten Flächen windschief versetzt sind. Verbindet man die Endpunkte dieser Strecken so entstehen Dreiecke wir in der nebenstehenden Figur.



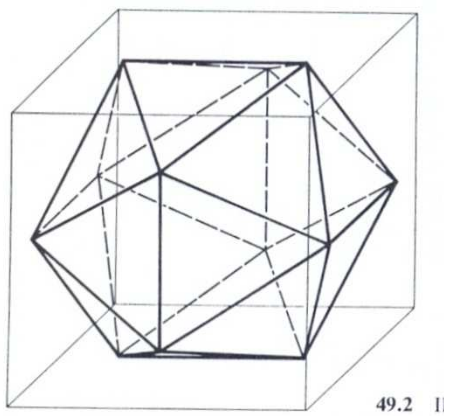
Die Koordinaten der Punkte ergeben sich zu:
$A\left(0,-\frac{b}{2},\frac{1}{2}\right)$, $B\left(0,\frac{b}{2},\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{1}{2},0,\frac{b}{2}\right)$, $D\left(\frac{b}{2},\frac{1}{2},0\right)$

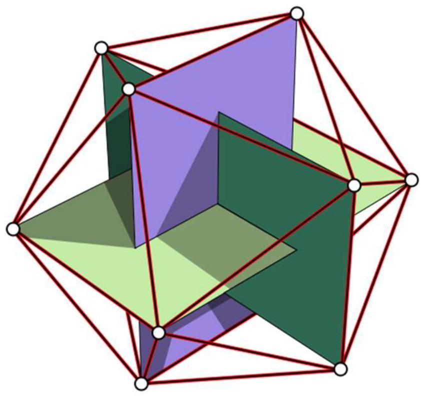
Die Streckenlänge b ist so zu wählen, dass die Dreiecke gleichseitig sind.
Aus

$\overline{AB}=\overline{AC}=b$ oder $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2=b^2$ folgt: $b^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-1}{2}\right)^2$

oder umgeformt $\frac{1}{2}(b^2+\ b-1)=0$ oder vereinfacht $b^2+\ b-1=0$.
Es ergibt sich erneut die vom Goldenen Schnitt bekannte quadratische Gleichung. Sie hat wie dort gezeigt wurde die Lösungen ρ und -τ.
Dasselbe Resultat folgt auch aus der Bedingung $\overline{AB}=\overline{DC}=b$

Damit ergibt sich das folgende Ergebnis:
Die Kantenlänge des einbeschriebenen Ikosaeders ist gerade gleich dem grösseren Abschnitt der stetig geteilten Würfelkante.





In der Abbildung rechts ist der folgende Satz veranschaulicht:

Satz:
Die zwölf Ecken eines Ikosaeders sind die zwölf Ecken dreier goldener Rechtecke (oder näherungsweise von drei Postkarten), die paarweise aufeinander senkrecht stehen.