14. Berühmte unlösbare Probleme

1. Quadratur des Kreises, Rektifikation des Kreises
2. Dreiteilung eines beliebigen Winkels (Nikomedes, Konchoiden)
3. Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem)

Werden gemäss einer Forderung von Platon (429-348 v. Chr.) als Konstruktionshilfsmittel nur Zirkel und Lineal zugelassen, so sind diese Probleme unlösbar. Wird trotzdem eine Aufgabe gelöst, so handelt es sich um eine Näherungslösung oder es werden zusätzliche Konstruktions-mittel zugelassen.

zu 1.
Unter der Quadratur des Kreises versteht man die Aufgabe, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Unter der Rektifikation des Kreises versteht man das Problem, eine Strecke zu konstruieren, deren Länge mit dem gegebenen Kreisumfang übereinstimmt. Wegen $A = r^2\pi = \frac{1}{2}Ur$ sind die beiden Probleme gleichwertig (würde es gelingen, den halben Kreisumfang zu konstruieren, dann hätte ein Rechteck, dessen Seiten $\frac{1}{2}U$ und r sind, den gleichen Inhalt wie der Kreis. Der Nachweis der Unmöglichkeit gelang
F. Lindemann (1882) indem er zeigte, dass π transzendent (nicht algebraisch) ist.

zu 2.
Das Problem führt auf die Gleichung $4\cos^3(\frac{\varphi}{3}) - 3\cos(\frac{\varphi}{3}) - \cos\varphi = 0$. Im Spezialfall $\varphi = 60°$, ergibt sich die Gleichung $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$. Mit Zirkel und Lineal sind nur die Punkte konstruierbar, deren Koordinaten sich durch Quadratwurzelausdrücke aus den Koordinaten der gegebenen Punkte darstellen lassen.

Ist als zusätzliches Hilfsmittel ein sogenanntes Einschiebelineal zugelassen, dann ist die Konstruktion möglich. Näheres dazu bei
https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels

zu 3.
Das Problem führt auf die Gleichung $x^3 = 2$

Beispiele von Näherungskonstruktionen:

Näherungskonstruktion des Jesuitenpaters Adam Kochanski am Hofe des Königs von Polen (1685) für den Kreisumfang.

Vom Punkt D wird dreimal der Radius r abgetragen. Die Länge der Strecke $\overline{AE}$ ist ungefähr gleich dem Kreisumfang.

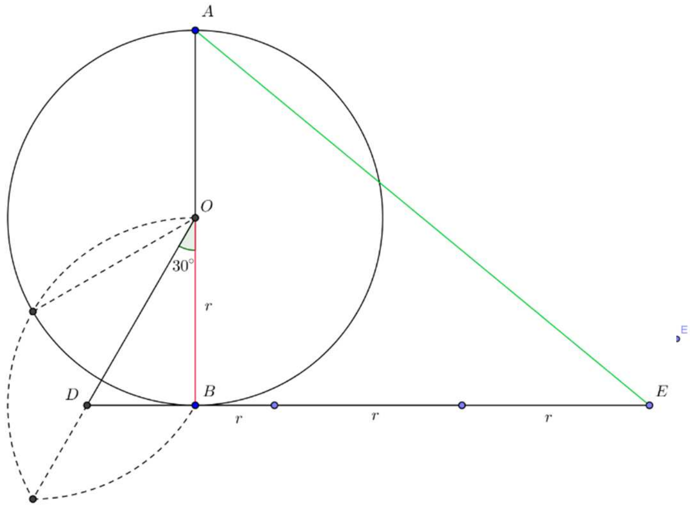
$\overline{BD} = \frac{r\sqrt{3}}{3} \qquad \overline{BE} = r\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2}$

$\overline{AE} = \sqrt{4r^2 + r^2\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = r \cdot \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$

$\overline{AE} \approx 3.141533 \cdot r$

Der relative Fehler beträgt etwa 0.002%



Zum Vergleich:
Der Fehler entspricht etwa der Differenz um einen Schritt (80 cm) auf einen Fussmarsch von 3 Stunden (15 km).

Näherungskonstruktion für den Flächeninhalt eines Kreises:

Der Kreisdurchmesser $\overline{AB}$ wird in 14 gleich grosse Teile geteilt.
Die Senkrechte auf $\overline{AB}$ in D schneidet den Kreis in C.
Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt nach dem Kathetensatz:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AQ} = 2r \cdot \frac{11}{7} \cdot r = \frac{22}{7} \cdot r^2$

Der Kreis ist ungefähr inhaltsgleich dem Quadrat über der Kathete $\overline{AC}$.
Als Näherungswert für π wird also $\frac{22}{7}$ verwendet.