12. Kreis

Kreisumfang

Alle Kreise sind zueinander ähnlich. Da in ähnlichen Figuren die Längen entsprechender Strecken im gleichen Verhältnis stehen, ist das Verhältnis von Kreisumfang und Kreisdurchmesser für alle Kreise gleich gross. Deshalb definieren wir:

$$\frac{U}{d} = \pi \qquad \text{und damit } U = d\pi = 2r\pi$$

> Definition:
> Der Quotient aus Kreisumfang und Kreisdurchmesser wird mit π bezeichnet.

π ist ein nicht abbrechender, nicht periodischer Dezimalbruch, d.h. π ist eine irrationale Zahl.

Zur Bestimmung der irrationalen Zahl π werden nach einer Idee des Archimedes von Syrakus (ca. 287-212 v. Chr.) einem Kreis mit Durchmesser 1 je ein reguläres Sechseck ein- bzw. umbeschrieben. Anschliessend wird die Eckenzahl wird schrittweise verdoppelt. Die Umfänge dieser Vielecke bilden dann eine Intervallschachtelung für die Zahl π.

Für den Umfang der einbeschriebenen Vielecke gilt die folgende Rekursionsformel:

$$\boxed{u_{2n} = \frac{2u_n}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{u_n}{n}\right)^2}\right)}}} \qquad (1)$$

Der Umfang U_n des umbeschriebenen n-Ecks kann nach der folgenden Formel (2) aus dem Umfang u_n des einbeschriebenen Vielecks berechnet werden:

$$\boxed{U_n = \frac{u_n}{\sqrt{1-\left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}} \qquad (2)$$

Herleitung der beiden Formeln (1) und (2)

Kathetensatz im Dreieck ACE:

$s_{2n}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} = 2r \cdot (r - \overline{MD}) = 2r^2 - 2r \cdot \overline{MD}$

$\overline{MD}$ nach Pythagoras

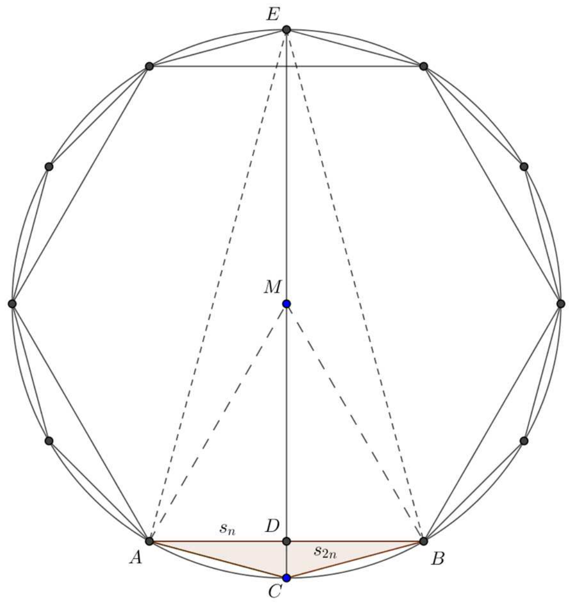
$\overline{MD} = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (4r^2 - s_n^2)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}$ (3)

$s_{2n}^2 = 2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2} = r \cdot (2r - \sqrt{4r^2 - s_n^2})$

und wegen $d = 2r = 1$

$s_{2n}^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{1 - s_n^2})$

Wegen der Gefahr der Auslöschung von Ziffern (die Subtraktion zweier ungefähr gleich grosser Zahlen ist zu vermeiden) erweitert man nach der 3. binomischen Formel



$$s_{2n}^2 = \frac{(1 - \sqrt{1 - s_n^2}) \cdot (1 + \sqrt{1 - s_n^2})}{2 \cdot (1 + \sqrt{1 - s_n^2})} = \frac{1 - (1 - s_n^2)}{2 \cdot (1 + \sqrt{1 - s_n^2})} = \frac{s_n^2}{2 \cdot (1 + \sqrt{1 - s_n^2})}$$

Für den Umfang des einbeschriebenen Vielecks gilt damit die folgende Rekursionsformel:

$$\boxed{u_{2n} = 2n \cdot s_{2n} = \frac{2n \cdot s_n}{\sqrt{2 \cdot (1 + \sqrt{1 - s_n^2})}} = \frac{2u_n}{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}\right)}}} \qquad 1)$$

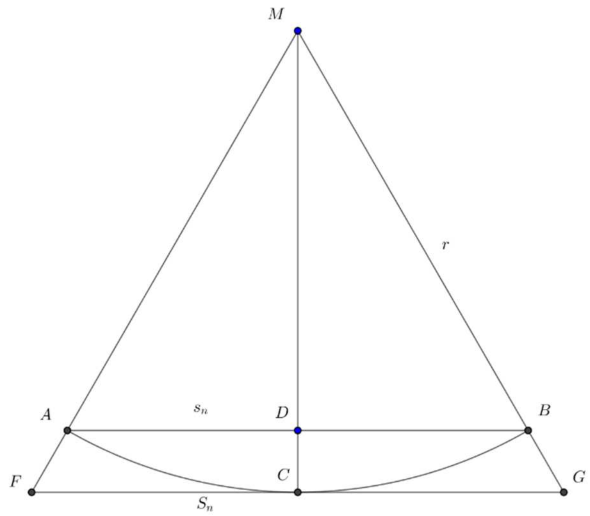
Nach dem 2. Strahlensatz gilt für die Seite S_n des umbeschriebenen n-Ecks

$\frac{S_n}{s_n} = \frac{r}{\overline{MD}} = \frac{2r}{\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$ nach (3)

wegen $2r = 1$ folgt

$S_n = \frac{s_n}{\sqrt{1 - s_n^2}}$ und daraus (2)

$$\boxed{U_n = \frac{u_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}} \qquad 2)$$



Mit dem Startwert n = 6 ergibt sich folgende Tabelle (piarch.xls):

Pi nach Archimedes

n	u_n	u_{2n}	U_n	U_n-u_n
6	3.00000000000000	3.10582854123025	3.46410161513775	0.46410161513776
12	3.10582854123025	3.13262861328124	3.21539030917347	0.10956176794322
24	3.13262861328124	3.13935020304687	3.15965994209750	0.02703132881626
48	3.13935020304687	3.14103195089051	3.14608621513143	0.00673601208457
96	3.14103195089051	3.14145247228546	3.14271459964537	0.00168264875486
192	3.14145247228546	3.14155760791186	3.14187304997982	0.00042057769436
384	3.14155760791186	3.14158389214832	3.14166274705685	0.00010513914499
768	3.14158389214832	3.14159046322805	3.14161017660469	0.00002628445637
1536	3.14159046322805	3.14159210599927	3.14159703432153	0.00000657109348
3072	3.14159210599927	3.14159251669216	3.14159374877135	0.00000164277208
6144	3.14159251669216	3.14159261936538	3.14159292738510	0.00000041069294
12288	3.14159261936538	3.14159264503369	3.14159272203861	0.00000010267323
24576	3.14159264503369	3.14159265145077	3.14159267070200	0.00000002566831
49152	3.14159265145077	3.14159265305504	3.14159265786784	0.00000000641708
98304	3.14159265305504	3.14159265345610	3.14159265465931	0.00000000160427
196608	3.14159265345610	3.14159265355637	3.14159265385717	0.00000000040107
393216	3.14159265355637	3.14159265358144	3.14159265365664	0.00000000010027
786432	3.14159265358144	3.14159265358770	3.14159265360650	0.00000000002507
1572864	3.14159265358770	3.14159265358927	3.14159265359397	0.00000000000627
3145728	3.14159265358927	3.14159265358966	3.14159265359084	0.00000000000157
6291456	3.14159265358966	3.14159265358976	3.14159265359005	0.00000000000039
12582912	3.14159265358976	3.14159265358978	3.14159265358986	0.00000000000010
25165824	3.14159265358978	3.14159265358979	3.14159265358981	0.00000000000002
50331648	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358980	0.00000000000001
100663296	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	0.00000000000000

Zur Geschichte der Zahl π:

π wird auch Ludolf'sche Zahl genannt, nach dem holländischen Mathematiker Ludolf van Ceulen (1540-1610) der als erster 35 Stellen berechnet hat (siehe Archimedes).
Seit Jahrtausenden sind Näherungswerte für π bekannt:

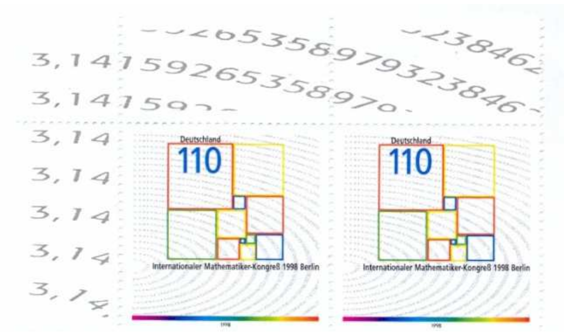
In der Bibel heisst es im 1. Buch der Könige Kapitel 7, Vers 23-26 bei der Beschreibung des ehern Meers im Tempel Salomons: „ Und er machte ein Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit, rund umher, und fünf Ellen hoch, und eine Schnur dreissig Ellen lang war das Mass ringsum". Damit ist in der Bibel der Wert von π zu 3 festgelegt.

Einige Näherungswerte:

Bei den Ägyptern (2000 v. Chr.)	$\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.160$
Archimedes, um 250 v. Chr.	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ $\quad 3.1408 < \pi < 3.1429$
Brahmagupta Indien, um 630 n. Chr.	$\sqrt{10} \approx 3.162$
Francois Viète (Vieta), 1546-1603	$1.8 + \sqrt{1.8} \approx 3.1416$

Und überdies:

Zum „Internationalen Mathematiker-Kongress 1998 erschien die abgebildete Briefmarke (Doppelblock und Abbildung 1), auf der in Form einer Arena die ersten Dezimalen von π dargestellt sind. Ausserdem ist ein Rechteck zu erkennen, das aus 11 unterschiedlichen Quadraten mit ganzzahligen Seitenlängen zusammengesetzt ist (die Aufteilung ist in Abbildung 2 zu erkennen).



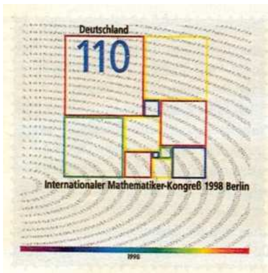


Abbildung 1

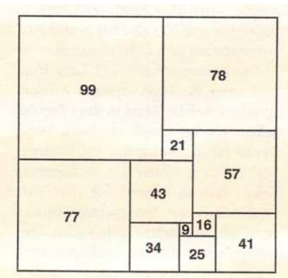


Abbildung 2

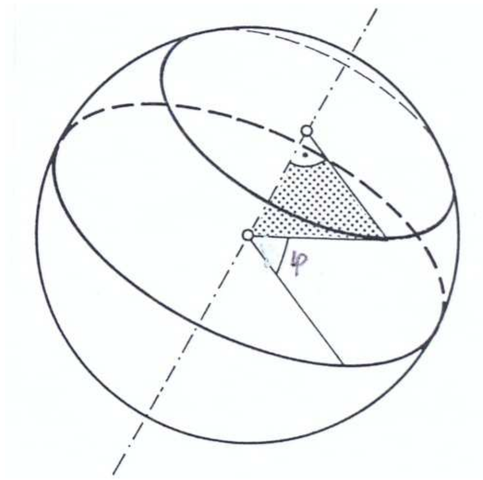
Merkspruch für π:
Die Anzahl der Buchstaben der aufeinander folgenden Wörter liefert jeweils die nächste Stelle von π.

Wie 0 dies π 3.141
Macht ernstlich so vielen viele Müh! 592653
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein, 58979
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein! 323846264

Das Repräsentantenhaus des US-Staates Indiana beschloss am 18. Januar 1897 per Dekret Nr. 246, dass inskünftig $\pi = 4$ zu gelten habe.

Mit raffinierten Verfahren hat es der aktuelle Rekordhalter (1997)
Yamasuda Kanada vom Rechenzentrum in Tokio geschafft, π auf 51 539 607 510 Stellen genau zu berechnen.
Website: https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl , www.angio.net/pi/bigpi.cgi

Aufgabe:
Welchen Weg legt ein Punkt mit der geographischen Breite φ aufgrund der Erdrotation in der Sekunde zurück?



φ = 0° (Äquator) $\frac{40000}{86400} \approx 462\ m/s$

φ = 60° (Oslo) $\frac{40000}{86400 \cdot 2} \approx 231\ m/s$

φ = 45° (Turin) $\sqrt{2}$ -mal so gross wie in Oslo
$327 m/s$

φ = 30° (Kairo) $\sqrt{3}$ -mal so gross wie in Oslo
≈ 0.401 m/s

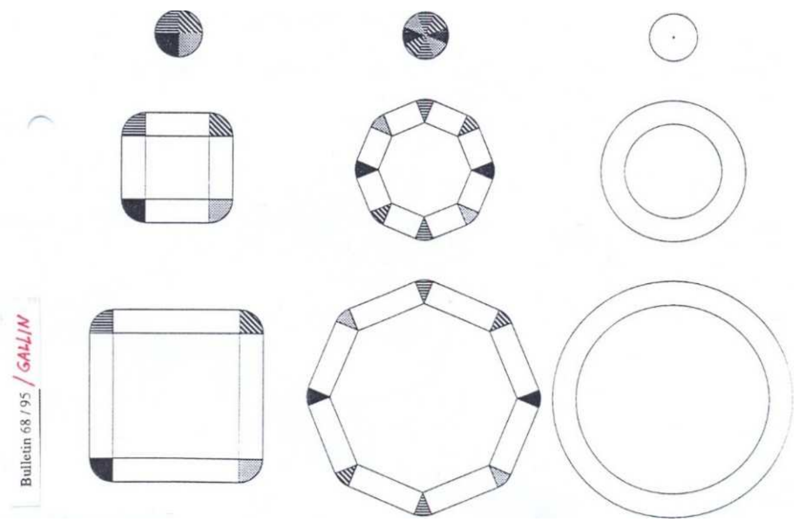
Aufgabe:
Wir denken uns eine Schnur um den Äquator gespannt. Die Schnur wird nun um einen Meter verlängert und anschliessend zu einem konzentrischen Kreis angeordnet. Wie gross ist die Radiuszunahme?

Der Umfang eines Kreises ergibt sich aus dem Radius durch Multiplikation mit 2π.
Umgekehrt ergibt sich der Radius aus dem Umfang durch Division durch 2π.

Radius des ursprünglichen Kreises r in Meter
Umfang des ursprünglichen Kreises (Erdumfang) $U = 2\pi r$
Umfang des vergrösserten Kreises $U = 2\pi r + 1$
Radius R des grösseren Kreises $R = \frac{2\pi r + 1}{2\pi} = r + \frac{1}{2\pi}$

Das verblüffende Resultat:
Die Radiuszunahme ist von r unabhängig ≈ 15.9 cm

Die Abbildung nach einer Idee von Gallin macht das Ergebnis plausibler.
Die kleinen Kreise haben alle den Umfang von einem Meter. Dieser Umfangverlängerung wird zunächst in vier Sektoren geteilt und auf die vier Ecken des Quadrats verteilt, anschliessend wird je ein Achtel eines Meters auf die acht Ecken verteilt. Bei jeder Verdopplung der Eckenzahl bleibt die Vergrösserung der Randfigur gleich gross.



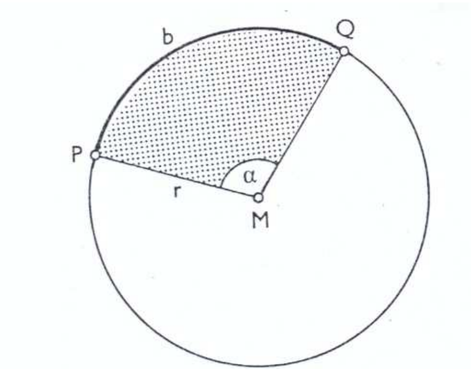
Ideen für Übungsaufgaben:
Es sind die folgenden Angaben in einem Zeitungsartikel zu überprüfen :
a)
Der Radfahrer Cancellara wählte 2009 ein Rad mit den folgenden Übersetzungen:
2 Kettenblätter vorne mit 54 bzw. 42 Zähnen, hinten zehn Ritzel mit 11 bis 23 Zähnen. Das ergibt pro Pedalumdrehung eine Spanne von 5.1 m (42 x 23) bis 13.7 m (54 x 11).
Durchmesser des Hinterrads?
b)
Beim Prologzeitfahren von Nizza über 7 km (16.5.1998) betrug die Zeit des Siegers Alex Zülle 7.55 Minuten (53.053 km/h). Er fuhr mit einer Übersetzung von 56×11, was einer Distanz von 10.64 m pro Pedalumdrehung entspricht. Anzahl Pedalumdrehungen?, Durchmesser des Hinterrads?
c)
Eine Schnur ist symmetrisch um einen zylindrischen Stab mit Umfang 5 cm und Länge 12 cm gewickelt. Die Schnur windet sich genau viermal um den Stab. Bestimme die Länge der Schnur. Tip: Abwicklung des Zylindermantels betrachten.
d)
Eine Münze mit Radius r rollt auf einer Münze mit gleichem Radius. Wieviele Umdrehungen macht die erste Münze um ihre Achse bei einem vollen abrollen auf der zweiten?
e)
Der Taxzähler eines Taxis ist auf einen Raddurchmesser d= 49 cm eingestellt.
1) Wieviel Prozent beträgt der Fehler, wenn d durch Abnutzung der Pneus 0.1 cm kleiner wird?
2) Wieviel Meter berechnet der Zähler auf einer effektiven Strecke von 3000 m Länge?

Lösungen:
d)
2, denn die Münze macht eine Umdrehung mehr, als wenn sie auf einer geraden Strecke rollen würde (auch ausprobieren).
e)
1) $x: 100 = 0.7: 49 \quad x \approx 1.429\%$
2) $3042.8\, m$

Kreisbogen

Da der Kreisbogen zum Zentriwinkel proportional ist, ergibt sich:

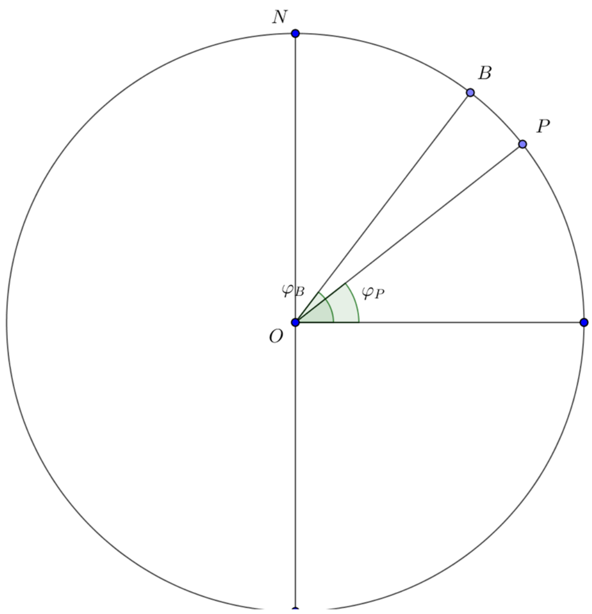
$$b = U \cdot \frac{\alpha}{360} = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360} = r \cdot \frac{\pi\alpha}{180} \qquad (1)$$



Aufgabe:
Eine Seemeile ist die Länge des Bogens auf einem Erdmeridian zum Zentriwinkel 1′ (Meridianminute). Wieviele km misst eine Seemeile? (Erdradius r ≈ 6370 km)

1 Seemeile entspricht $\frac{2\pi r}{360 \cdot 60} \approx 1.85\ km$

Aufgabe:
Berlin (geografische Breite $\varphi_B = 52.52°N$) und Palermo ($\varphi_P = 38.12°N$) liegen ungefähr auf demselben Längenkreis. Wie gross ist ihre Entfernung?



Die Differenz der geographischen Breiten beträgt $\Delta\varphi = 13°47'$

$$b = r \cdot \frac{\pi\alpha}{180} \approx 6370 \cdot \frac{\pi \cdot 13.78}{180} \approx 1530\ km$$

Übungsaufgabe:
Entfernung zwischen Stockholm (+59° 21´ nördliche Breite) und Kapstadt (-33° 54´ südliche Breite)

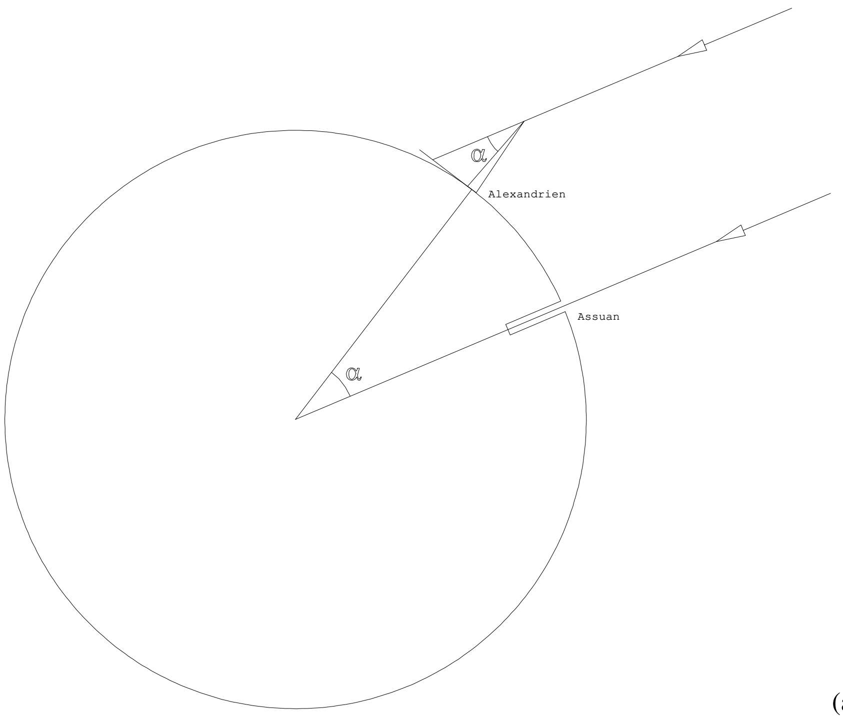
Lösung: Entfernung ≈ 10367 km

Eratosthenes (280-200 v. Chr.) berechnete den Erdumfang mit der folgenden Methode:

Alexandria und Syene (in der Nähe des heutigen Assuans) liegen ungefähr auf demselben Längenkreis. Eratosthenes bestimmte zunächst längs des Karawanenwegs die Entfernung zwischen diesen beiden Orten zu 5000 Stadien (1 Stadion 157.5 m) ungefähr 1100 km..
Am 21. Juni (zur Sonnenwende) beträgt die Kulminationshöhe der Sonne gerade 90° (die Sonne steht also zu einem gewissen Zeitpunkt genau senkrecht über dem Beobachter), während sie in Alexandria zur gleichen Zeit nur 82.86° beträgt. Der Winkel α ist also 7.14° (360°/50).

Löst man Gleichung (1) nach r auf, so erhält man:

$r = \dfrac{180 \cdot b}{\pi\alpha} \approx 40107$ Stadien, was einem Erdradius von 6317 km entspricht, ein Ergebnis mit nur 1% Fehler.

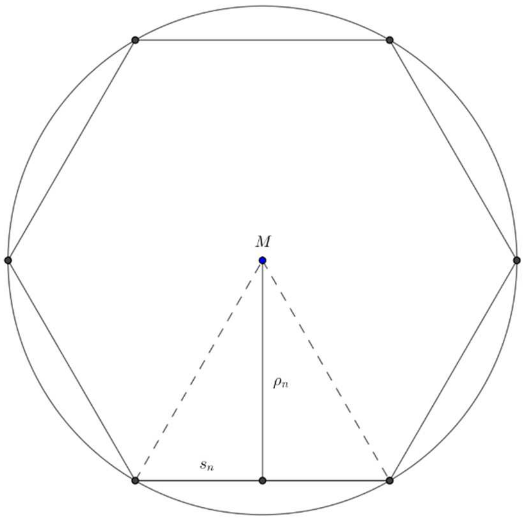


(ac)

Bemerkung:
Beim Umgang mit antiken Längenmassen ist allerdings eine gewisse Vorsicht angebracht, da sich unter der gleichen Bezeichnung mehrere verschiedene Längen verbergen können.

Kreisinhalt

Die Inhalte der ein- bzw. umbeschriebenen regulären Vielecke bilden eine Intervall-schachtelung für den Kreisinhalt A.



Für den Inhalt des einbeschriebenen n-Ecks gilt mit dem Inkreisradius ρ_n gilt:

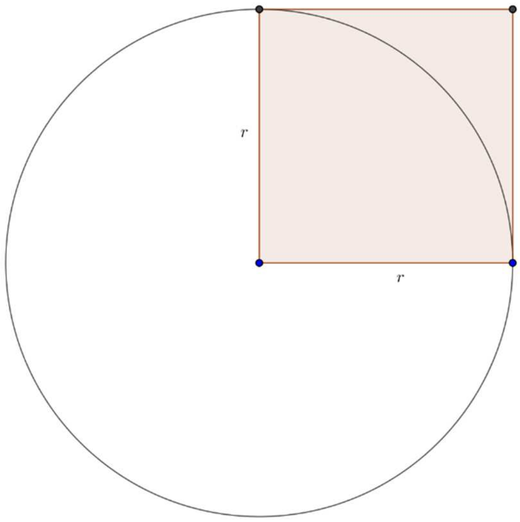
$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s_n \cdot \rho_n = \frac{1}{2} \cdot u_n \rho_n$$

Mit wachsendem n nähert sich u_n immer mehr dem Kreisumfang, ρ_n dem Kreisradius r und damit A_n dem Grenzwert ½·2πr·r

$A = \pi r^2$	Flächeninhalt des Kreises

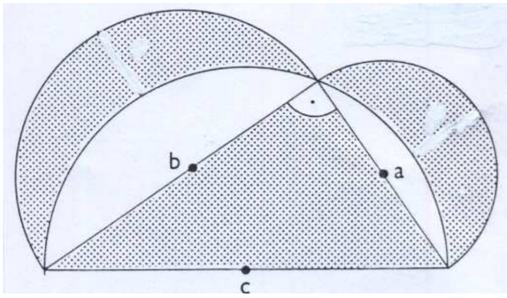
d.h. Der Kreisflächeninhalt ist das π-fache des Flächeninhalts des Quadrats über dem Radius.

Historische Ergebnisse:
Ägypter Ahmes (17. Jh. V. Chr.):
Der Kreis ist flächengleich einem Quadrat, dessen Seitenlänge $\frac{8}{9}$ des Kreisdurchmessers beträgt (entspricht einem Näherungswert für π von 3.16049).



Aufgabe:
Möndchen des Hippokrates von Chios (um 450 v. Chr.)

A: Inhalt der Möndchen
A_Δ: Inhalt des Dreiecks
A_a bzw. A_b: Inhalt des Halbkreises über der Kathete a bzw. b



$$A = A_\Delta + A_a + A_b - A_c$$

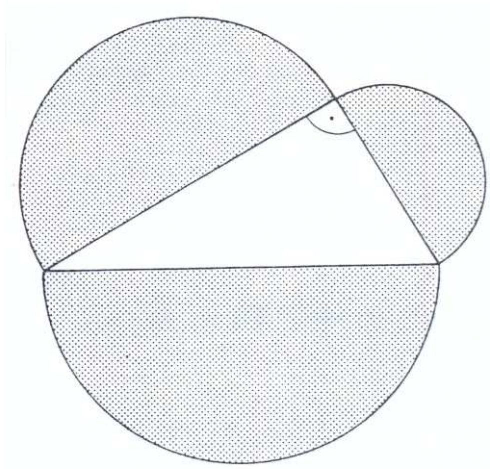
$$A = A_\Delta + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right)$$

$$A = A_\Delta + \frac{\pi}{8} \cdot \left(a^2 + b^2 - c^2\right) = A_\Delta$$

Ergebnis:
Die beiden Möndchen und das Dreieck sind also flächengleich.

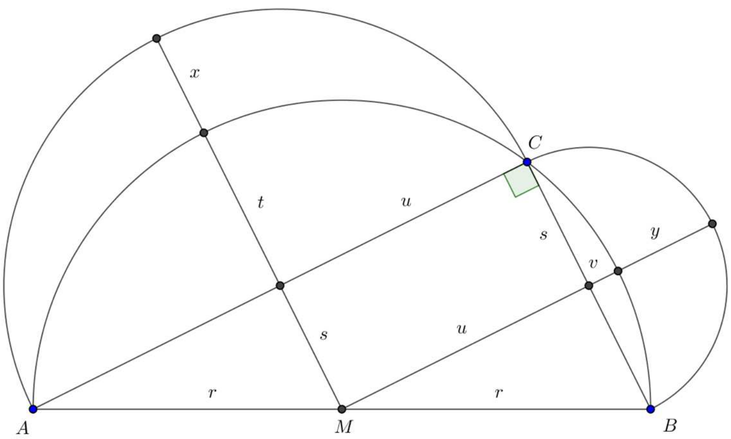
Das Ergebnis kann auch als verallgemeinerter Pythagoras aufgefasst werden:

Die Halbkreise über den Katheten sind inhaltsgleich zum Halbkreis über der Hypotenuse.



Zu den zwei Möndchen

Unabhängig davon, wo sich die Ecke C auf dem Halbkreis befindet, ist die Dicke der Möndchen stets gleich gross ($x = y$).



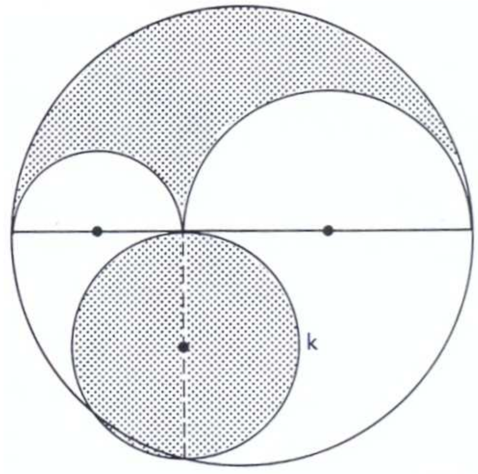
Beweis:
Das von den Seiten u und s gebildete Viereck ist ein Rechteck.

$$x = u - t = u - (r - s) = s + u - r$$

$$y = s - v = s - (r - u) = s + u - r$$

Im Spezialfall $s = \frac{3}{2},\ u = 2,\ r = \frac{5}{2}$ ist die Dicke der Möndchen gerade 1.

Aufgabe:
Die Sichel (Arbelos) von Archimedes



A_k	Inhalt des Kreises k
A_S	Inhalt der Sichel
A_a	Inhalt des Halbkreises mit Radius a
A_b	Inhalt des Halbkreises mit Radius b
A_{a+b}	Inhalt des Halbkreises mit Radius a + b

Inhalt der Sichel

$$A_S = \tfrac{1}{2} \cdot (A_{a+b} - A_a - A_b) = \frac{\pi}{2} \cdot ((a+b)^2 - a^2 - b^2)$$

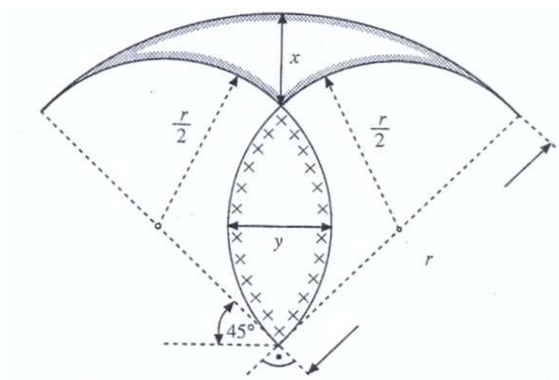
$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2ab = \pi ab$$

Der Durchmesser 2x des Kreises ergibt sich mit dem Höhensatz:
$4x^2 = 2a \cdot 2b$ und daraus $x^2 = ab$
Damit gilt für den Inhalt des Kreises

$$A_k = \pi x^2 = \pi ab$$

Damit ist gezeigt, dass die Sichel und der Kreis den gleichen Flächeninhalt haben.

Übungsaufgaben:
a)
Es ist nachzuweisen, dass beim folgenden „Pilz des Archimedes“ Hut und Stiel den gleichen Flächeninhalt und die gleiche Dicke haben.



b)
Das Salzfass (Salinon von Archimedes)

Lösungen:
a)

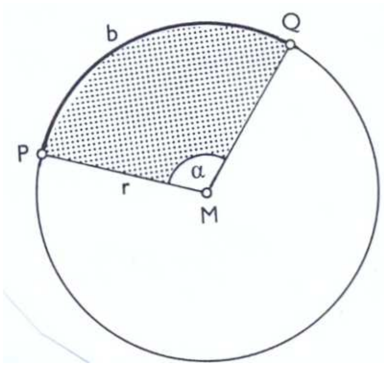
$$x = y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot r$$

b)

$$A_S = \pi(a+b)^2$$

Sektorinhalt

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \cdot r \cdot r = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$$



$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r}$$

Inhalt eines Sektors mit Radius r und Bogen b

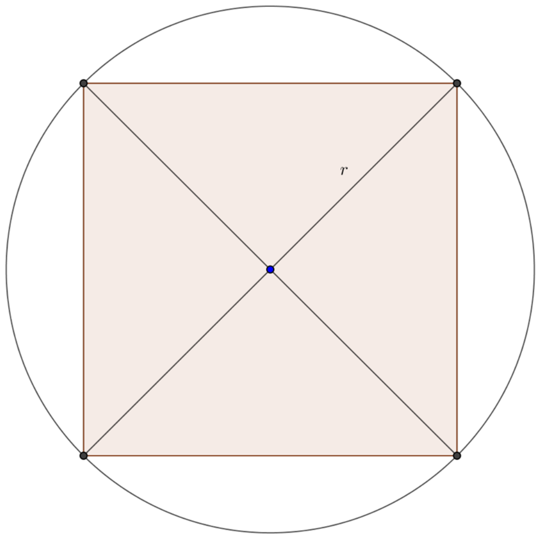
Es fällt die Analogie zur Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks auf.

Aufgabe:
Wie gross ist der Zentriwinkel eines Kreissektors, dessen Flächeninhalt gleich gross ist wie derjenige eines Quadrats, das dem Kreis einbeschrieben werden kann?

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r = 2\mathrm{r}^2$$ also

$$b = 4r = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha r$$

$$\alpha = 4 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{720}{\pi} \approx 229.18°$$



Übungsaufgabe:
Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien $\mathrm{r}_1 = \mathrm{r}_2 = \frac{9}{2} cm$ und dem Mittelpunkts-abstand $a = \frac{9}{2}$ cm. Welchen Inhalt hat die gemeinsame Fläche der beiden Kreise?

Lösung: $A = 2\left(\pi r^2 \cdot \frac{120}{360} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3}\right) \approx 24.9\ \mathrm{cm}^2$

Mantelfläche eines Kreiskegels

Wickelt man den Mantel eines Kreiskegels mit der Mantellinie s und dem Kreisradius r in die Ebene ab, so entsteht ein Kreissektor mit dem Radius s (Mantellinie) und Bogen $2\pi r$ (Umfang des Grundkreises)

Für die Mantelfläche eines Kreiskegels gilt damit: $A = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot s \; = \; \pi r s$

Übungsaufgabe:
Es ist die folgende Formel für die Mantelfläche eines Kegelstumpfes herzuleiten:
$A_M = \pi(r_1 + r_2) \cdot s$