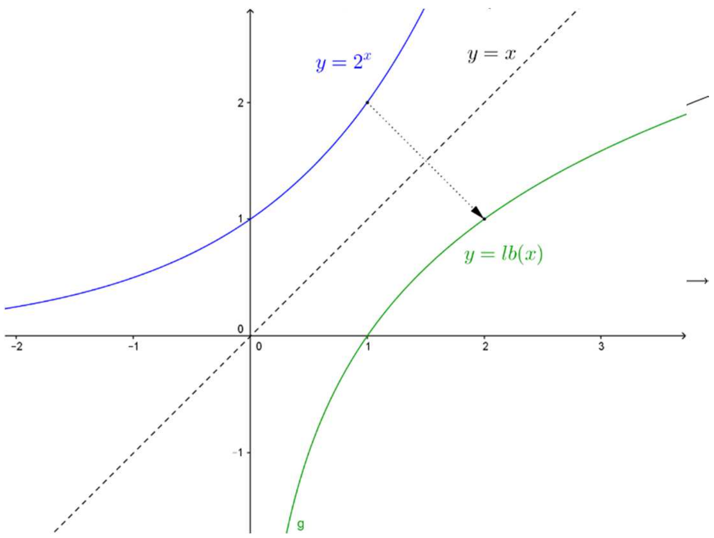
10. Logarithmusfunktion

In der Abbildung sind der Graph der Exponentialfunktion zur Basis 2 und der Graph ihrer Umkehrfunktion, der Logarithmusfunktion zur Basis 2 dargestellt.



Allgemein:
Die Exponentialfunktion ordnet jeder reellen Zahl x eindeutig die Zahl
$y = a^x$ zu ($a > 0, a \neq 1$).
Das Problem die Gleichung $y = a^x$ für $y > 0$ nach x aufzulösen, führt auf die Gleichung
$x = log_a y$.
Die Logarithmusfunktion ist also die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.
Vertauscht man nachträglich die Variablen x und y, so bewirkt dies graphisch eine Spiegelung der Exponentialkurve an der 1.Winkelhalbierenden.

Gegebene Funktion:
Exponentialfunktion: $]-\infty, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ $\quad x \rightarrow y = a^x$

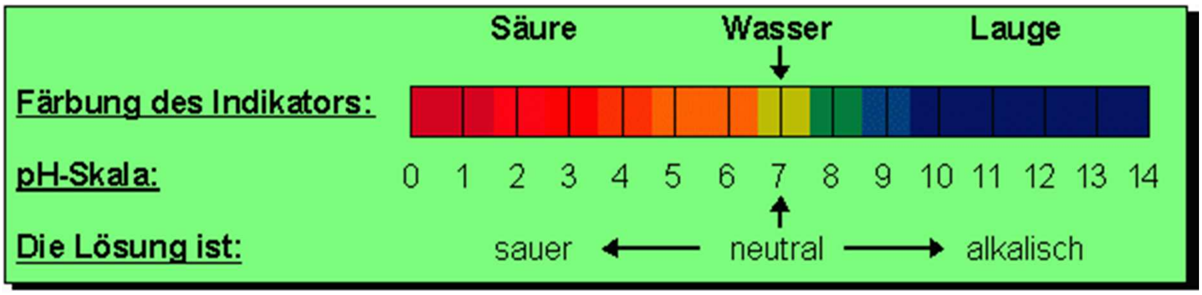
Umkehrfunktion
Logarithmusfunktion: $[\ 0, \infty] \quad \rightarrow]-\infty, \infty[$ $\quad x \rightarrow log_a x$

Der Graph der Logarithmusfunktion entsteht aus dem Graphen der Exponentialfunktion durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.

11. Logarithmen in Anwendungsbereichen

Chemie: pH-Wert einer Lösung

Wird eine Säure in Wasser gelöst, so entstehen H3O+-Ionen, die für das saure Verhalten der Lösung massgebend sind.
Der pH-Wert einer Lösung beträgt $pH = -log_{10}\, c(H_3O^+)$, wobei $c(H_3O^+)$ die H_3O^{++}-Konzentration in mol pro Liter bedeutet. Dieser Wert ist ein Mass dafür, wie sauer oder basisch eine Lösung ist. Je niedriger der pH-Wert ist, desto stärker sauer ist die betreffende Lösung. In Essig misst man z.B. einen pH-Wert von 3.



Übungsaufgabe:
Für die folgenden Lösungen ist der pH-Wert zu berechnen:
a) einer Lauge mit $c = 2.5\cdot10^{-12}$ mol/Liter
b) von Wasser mit $c = 10^{-7}$ mol/Liter
c) einer Säure mit $c = 5.75\cdot10^{-12}$ mol/Liter.
d) Während eines Gewitters misst man beim Regenwasser den pH-Wert 2.8. Wievielmal grösser ist die Konzentration c als in reinem Wasser?

Lösung:
a) pH-Wert: ≈ 11.60 b) 7 c) ≈ 1.24
d) $-log_{10}\, c = 2.8$ $c \approx 1.585\cdot10^{-3}$

$$\frac{1.58\cdot10^{-3}}{10^{-7}} = 1.58\cdot10^{4}$$ ungefähr 15 850 mal grösser.

Astronomie: Helligkeit eines Sterns

Übungsaufgabe:
In der Astronomie wird die Helligkeit m von Sternen mit der folgenden Formel bestimmt:

$$m = -2.5\cdot\log_{10}\left(\frac{J}{J_0}\right)$$ Masseinheit 1 mag (Magnitudo)

Dabei bedeutet J die physikalisch messbare Strahlungsintensität [W/m^2].
Für die Sonne gilt m = -26.7 mag und $J = 1.36\cdot10^{3}$ W/m^2 (sogenannte Solarkonstante).
a) Berechnen Sie J_0 [W/m^2].
b) Die Helligkeit des Polarsterns beträgt m = 2.1 mag. Berechnen Sie die Strahlungsintensität J [W/m^2].
c) Die schwächsten, mit dem Hubble-Weltraumteleskop gerade noch erreichbaren Sterne haben eine Grösse von 30 mag. Wievielmal grösser ist die Strahlungsintensität der Sonne?

a) $2.841\cdot10^{-8}$ W/m^2 b) $4.107\cdot10^{-9}$ W/m^2 c) $4.786\cdot10^{22}$

Schallintensität, das Weber-Fechnersche Gesetz

Schallwellen sind Druckschwankungen der Luft. Die Intensität I eines Schalls wird in Watt pro Quadratmeter gemessen. Diese objektive, messbare Grösse gibt an, wie viel Energie pro Zeit (Watt) und pro Fläche (m^2) ankommt. Die subjektiv empfundene Lautstärke wird in Dezibel (dB) gemessen. Eine doppelte Intensität wird nämlich nicht als doppelt so laut empfunden. Nach dem sogenannten Weber-Fechnerschen Gesetz ist die Sinnesempfindung nämlich proportional zum Logarithmus des physikalischen Reizes. Zwischen diesen beiden Grössen besteht der folgende Zusammenhang:

$$L = 10 \cdot \left(\log(I) + 12\right)$$

Die Lautstärke 0 dB ist die Hörschwelle, bei der man subjektiv nichts mehr wahrnimmt. Ihr entspricht die Intensität $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Beim gleichzeitigen Einwirken von verschiedenen Schallquellen können deren Intensitäten addiert werden.

Einer Vergrösserung um 10 dB entspricht eine Verzehnfachung der Schallintensität.
Welche Lautstärken gehören zu den folgenden Schallintensitäten?

I_0	$10I_0$	$100I_0$	$1000I_0$	
L = 0	10	20	30	dB

Beispiele:	dB	
Blätterrauschen	30	$1000 \cdot I_0$
Autohupe in 1m Abst.	110	$10^{11} \cdot I_0$
Schmerzgrenze	130	$10^{13} \cdot I_0$

Übungsaufgabe:
Eine Gruppe von sieben Rockmusikern erzeugt in einem Raum die Lautstärke 122 dB. Wie viele Musiker müssten dazukommen, wenn die Laustärke auf 130 dB (Schmerzgrenze) erhöht werden soll?

Lösung:
$L(7) = 10 \cdot (log_{10}(7I) + 12) = 122$
$L(n) = 10 \cdot (log_{10}(nI) + 12) = 130$
$log_{10}(nI) - log_{10}(7I) = log_{10}\left(\frac{n}{7}\right) = 0.8$
$\frac{n}{7} = 10^{0.8} \approx 6.3 \qquad n \approx 44$
Es müssten also 37 Musikerinnen dazu kommen.

Die objektive Schallintensität I ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands r von der Schallquelle:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

d.h. in doppeltem Abstand von der Schallquelle beträgt, die Intensität nur noch ein Viertel, denn die Energie verteilt sich auf die vierfache Fläche.

Die folgenden Übungsaufgaben untersuchen, wie sich folglich die subjektive Lautstärke ändert, wenn man sich von der Quelle entfernt?

Übungsaufgaben:
1.
Um wieviel dB nimmt die Lautstärke ab, wenn man den Abstand von der Schallquelle
a) verdoppelt b) verzehnfacht?

Wegen $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ gilt $\frac{I_1}{I_2} = 4$ oder also $I_2 = \frac{1}{4} I_1$

Wegen $L_1 = 10 \cdot (log_{10}(I_1) + 12)$ und
$L_2 = 10 \cdot \left(log_{10}\left(\frac{1}{4} \cdot I_1\right) + 12\right) = 10 \cdot (log_{10}(I_1) + 12) - 10 \cdot log_{10}4$a)
$L_2 = L_1 - 10 \cdot log_{10}4 \approx L_1 - 6$
Die Lautstärke nimmt also bei a) um 4 dB und bei b) um 10 ab.

2.
Ein Moped mit gutem Auspuff entwickelt in 7m Abstand ca. 90 dB
a) welche Lautstärke erzeugen zwei solcher Mopeds?
b) Wie viele Mopeds mit gutem Auspuff entwickeln die gleiche Lautstärke wie ein Moped mit schlechtem Auspuff (ca. 105 dB)
c) In welcher Entfernung entwickelt ein Moped mit schlechtem Auspuff die gleiche Lautstärke wie ein Moped mit gutem Auspuff in 7 m Entfernung?

Lösungen:
Mit der Umkehrfunktion von $L = 10 \cdot (\log(I) + 12)$ kann die Intensität aus der Lautstärke berechnet werden:

Aus $\log I + 12 = \frac{L}{10}$ folgt $I = 10^{\frac{L}{10} - 12}$
und somit

für einen guten Auspuff wegen $L_g = 90$: $I_g = 10^{\frac{90}{10} - 12} = 10^{-3}$ und (1)

für einen schlechten Auspuff $L_g = 105$: $I_g = 10^{\frac{105}{10} - 12} = 10^{-1.5}$ (2)

a)
$L_g = 10 \cdot \left(log_{10}(2I_g) + 12\right) = 10 \cdot \left(log_{10}(I_g) + 12\right) + 10log_{10} 2 \approx L_g + 3 = 93$
b)
Wegen 1) und 2) muss für die Intensitäten gelten:
$n \cdot I_g = I_s$ oder $n = \frac{I_s}{I_g} = \frac{10^{-1.5}}{10^{-3}} = 10^{1.5} \approx 31$
c)
Aus $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ folgt $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$ oder $r_2 = r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$ mit $r_1 = 7$, $I_1 = 10^{-1.5}$ und $I_2 = 10^{-3}$

$r_2 = 7 \cdot \sqrt{10^{1.5}} = 7 \cdot 10^{\frac{3}{4}} \approx 7 \cdot 5.6 \approx 40m$

Die Richterskala bei Erdbeben

Der Seismologe Richter (1900-1985) bestimmte eine Methode zur Messung der Intensität von Erdbeben. Dazu verglich Richter mit einem Seismograph die Wirkung eines Erdbebens mit der freigesetzten mechanischen Energie E in Tonnen TNT bei einer unterirdischen Explosion. Die sogenannte Richterskala ist definiert zu
$S = 2 + \frac{2}{3} \cdot \log_{10} E$ Einheit: Magnituden

Übungsaufgabe:
a)
Welchen Magnituden entsprechen die Wirkung von 1kg, 1 Tonne, 1 Kilotonne = 1000 Tonnen TNT (Grössenordnung einer kleinen Atombombe). Um wieviel verändert sich die Richterskala S, wenn sich E um den Faktor 10 verändert?
b)
Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion E(S), welche die freigesetzte Energie in Funktion der Erdbebenstärke angibt?
c)
Das bisher stärkste Erdbeben war dasjenige von Chile 1960 mit einer Magnitude 9.5. Welcher freigesetzten Energie in Kilotonnen entspricht dieses Erdbeben?

Lösungen:
a) 2, 4, 6, wächst linear um 2
b) $E = 10^{\frac{3}{2}(S-2)}$
c) mit S=9.5 $E = 10^{11.5} \approx 18 \cdot 10^{11}$