5. Logarithmengesetze

Bei den Logarithmengesetzen handelt es sich eigentlich um eine Umformulierung der Potenzgesetze.

einführende Beispiele:

$lb(16\cdot 64)=lb\left(2^4\cdot 2^6\right)=lb\left(2^{4+6}\right)=4+6=lb16+lb64$ Logarithmen werden addiert

$lb\left(\frac{32}{4}\right)=lb\left(\frac{2^5}{2^2}\right)=lb\left(2^{5-2}\right)=5-2=lb32-lb4$ Logarithmen werden subtrahiert

$lb\left(\frac{1}{8}\right)=lb\left(\frac{1}{2^3}\right)=lb\left(2^{-3}\right)=-3=-lb8$ Der Logarithmus wechselt das Vorzeichen

$lb\left(8^4\right)=lb\left(\left(2^3\right)^4\right)=lb\left(2^{3\cdot 4}\right)=4\cdot 3=4\cdot lb8$ Logarithmen werden multipliziert

$$lb\left(\sqrt{16}\right)=lb\left(16^{\frac{1}{2}}\right)=lb\left(\left(2^4\right)^{\frac{1}{2}}\right)=lb\left(2^{4\cdot\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot lb16$$

Allgemein gelten für jede zulässige Basis die folgenden

Logarithmengesetze

$\log(u\cdot v)=\log u+\log v$	(1) Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen
$\log\left(\frac{u}{v}\right)=\log u-\log v$	(2) Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen
$\log\left(\frac{1}{v}\right)=-\log v$	(2') Logarithmus des Kehrwerts
$\log\left(u^k\right)=k\cdot\log u$	(3) Logarithmus einer Potenz

Beweis:

In der Logarithmensprache		In der exponentiellen Sprache
$x=\log_a u$	$\rightarrow$	$a^x=u$
$y=\log_a v$	$\rightarrow$	$a^y=v$
$\log_a(uv)=x+y=\log_a u+\log_a v$	$\leftarrow$	$uv=a^{x+y}$

Zu beachten:

$lb(16+4)\neq lb16+lb4$ $\qquad$ $lb(16-4)\neq lb16-lb4$

$lb4\cdot lb8\neq lb(4\cdot 8)$ $\qquad$ $lb\left(\frac{32}{4}\right)\neq\frac{lb32}{lb4}$

Allgemein:	
$log(u+v) \neq log\, u + log\, v$	Der Logarithmus einer Summe ist i.a. **nicht** gleich der Summe der Logarithmen
$log(u-v) \neq log\, u - log\, v$	Der Logarithmus einer Differenz ist i.a. **nicht** gleich der Differenz der Logarithmen
$log(u) \cdot log(v) \neq log(uv)$	Der Logarithmus eines Produkts ist i. a. **nicht** gleich dem Produkt der Logarithmen
$\frac{\log u}{\log v} \neq \log\left(\frac{u}{v}\right)$	Der Logarithmus eines Quotienten ist i.a. **nicht** gleich dem Quotienten der Logarithmen

Aufgabe:
Welche Lösungen haben diefolgenden Logarithmengleichungen.?

a) $\log(x+3) = \log x + \log 3$

$\log(x+3) = \log x + \log 3 = \log(3x)$

Aus der Gleichheit der Logarithmen folgt die Gleichheit der zugehörigen Zahlen.

$\log(x+3) = \log(3x)$ $\qquad x+3 = 3x$ $\qquad x = \frac{3}{2}$

b) $\lg(9x+5) - \lg x = 1$

$\lg(9x+5) - \lg x = \lg\left(\frac{9x+5}{x}\right) = 1$ $\qquad \frac{9x+5}{x} = 10$ $\qquad x = 5$

c) $\log(x+4) + \log x = 2 \cdot \log(x+1)$

$\log(x \cdot (x+4)) = \log\left((x+1)^2\right)$ $\qquad x \cdot (x+4) = (x+1)^2$ $\qquad x = \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2} \cdot \lg(x+1) = 1 - \lg 2$

$\frac{1}{2} \cdot \lg(x+1) = \lg(x+1)^{\frac{1}{2}} = \lg 10 - \lg 2 = \lg\left(\frac{10}{2}\right) = \lg 5$

$\sqrt{x+1} = 5$ quadrieren $x+1 = 25$ $\qquad x = 24$

Die Probe stimmt.

e) $x = \lg 1 + \lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + \lg\frac{3}{4} + ... + \lg\frac{99}{100}$

$x = \lg 1 + (\lg 1 - \lg 2) + (\lg 2 - \lg 3) + ... + (\lg 98 - \lg 99) + (\lg 99 - \lg 100)$

$= -\lg 100 = -2$

Aufgabe:
Wie heissen die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{vmatrix} \lg xy & = 3 \\ \lg\frac{x}{y} & = 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} \lg x + \lg y & = 3 \\ \lg \mathrm{x} - \lg y & = 1 \end{vmatrix}$$

Addition der beiden Gleichungen führt auf $\lg \mathrm{x} = 2$ und auf $\lg \mathrm{y} = 1$ mit den Lösungen $x = 100$ und $\mathrm{y} = 10$.