

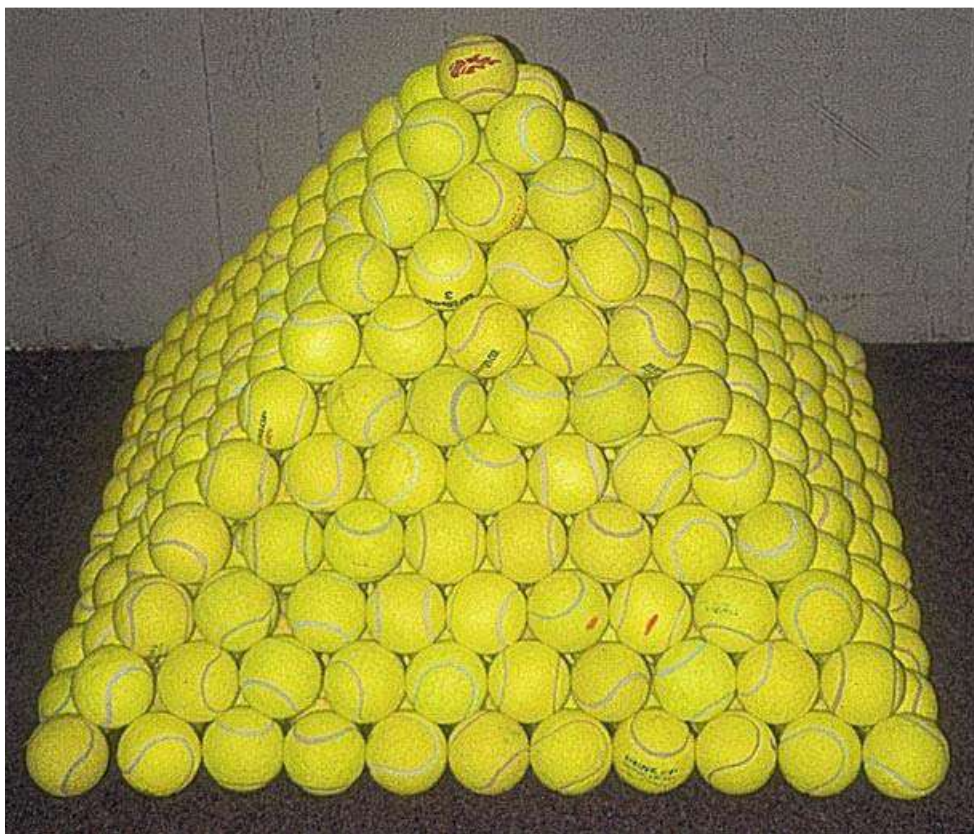
6. Arithmetische Folgen höherer Ordnung

AF 1. Ordnung	1	4	7	10	13
Differenzenfolge	3	3	3	3	

AF 2. Ordnung	1	4	9	16	25	36	49	64
1. Differenzenfolge	3	5	7	9	11	13	15	
2. Differenzenfolge		2	2	2	2	2	2	

Beispiel:

In der abgebildeten unvollständigen Pyramide aus Tennisbällen mit quadratischen Schichten hat es insgesamt $11^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 506$ Bälle.



Bei einer AF 2. Ordnung ist das n -te Glied a_n eine quadratische Funktion von n , die Summe der n ersten Glieder ist eine kubische Funktion von n .

Es gilt:

$$s = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{3} \cdot n^3 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Ein Beweis ergibt sich später im Abschnitt \rightarrow Vollständige Induktion

Mit der Annahme, dass die Summenformel eine kubische Funktion von n ist, können die Koeffizienten mit dem Ansatz

$$s_n = an^3 + bn^2 + cn$$

aus den Bedingungen $s_1 = 1$, $s_2 = 5$ und $s_3 = 14$ bestimmt werden.

Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

hat die Lösungen $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{2}$ $c = \frac{1}{6}$

Eine Herleitung ist auch auf dem folgenden Weg möglich:

Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt:

$$\begin{array}{l} (1+a)^3 = 1 + 3 \cdot a \quad + 3 \cdot a^2 + a^3 \\ a = 1 \quad 2^3 = 1 + 3 \cdot 1 \quad + 3 \cdot 1^2 + 1^3 \\ a = 2 \quad 3^3 = 1 + 3 \cdot 2 \quad + 3 \cdot 2^2 + 2^3 \\ a = 3 \quad 4^3 = 1 + 3 \cdot 3 \quad + 3 \cdot 3^2 + 3^3 \\ \dots \\ \dots \\ a = n \quad (1+n)^3 = 1 + 3 \cdot n \quad + 3 \cdot n^2 + n^3 \end{array}$$

Beide Seiten werden spaltenweise summiert. Die dritten Potenzen heben sich auf mit Ausnahme von $(1+n)^3$ auf der linken und 1^3 auf der rechten Seite.

$$(1+n)^3 = n + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + 3 \cdot s + 1$$

Löst man diese Gleichung nach s auf, so ergibt sich

$$s = \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{3} \cdot n^3 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Mit derselben Idee können die Summenformeln für 3. Potenzen (Polynom 4. Grades), bzw. 4. Potenzen, ..., k -te Potenzen hergeleitet werden.