5. Arithmetische Folgen (lineares Wachstum)

Beispiele:

2, 5, 8, 11, ...	$d = 3$	$d > 0$	die Folgenglieder wachsen
12, 8, 4, 0, ...	$d = -4$	$d < 0$	die Folgenglieder fallen

Definition:
Eine Folge bei der die Differenz $d \neq 0$ zweier aufeinanderfolgender Glieder immer gleich gross ist, heisst arithmetische Folge (AF).

$\boxed{\boldsymbol{a_1} \qquad \boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}}$ rekursive Definition einer arithmetischen Folge :

Der Name kommt daher, weil bei einer AF jedes Glied arithmetisches Mittel seiner Nachbarglieder ist, d.h. es gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_{n+1})}}$$

Explizite Formel für das n-te Glied:
$a_1 \qquad a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ durch induktives Schliessen

$$\boxed{\textbf{(1)}\ \boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}}$$

a_1	Anfangsglied
a_n	Endglied
d	Differenz
n	Anzahl Glieder

Bei einer AF wachsen die Folgenglieder also linear. Stellt man die Punkte (n, a_n) in einem Koordinatensystem dar, so liegen die zugehörigen Punkte auf der Geraden mit der Gleichung $y = d \cdot x + (a_1 - d)$

Aufgabe:
Zwischen 33 und 108 sind zwei Zahlen so einzuschalten, dass eine AF entsteht.

$108 = 33 + 3d \qquad d = 25 \qquad$ AF: 33 58 83 108

Aufgabe:
Wie viele dreistellige Zahlen sind durch 13 teilbar?

Die Vielfachen von 13 bilden eine arithmetische Folge mit der Differenz $d = 13$
$100 : 13 = 7\ Rest\ 9 \qquad a_1 = 8 \cdot 13 = 104$
$999 : 13 = 76\ Rest\ 12 \qquad a_n = 76 \cdot 13 = 988$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = 69$$

Variante:
Es gibt 76 Vielfache von 13, die kleiner als 1000 sind, 7 davon sind kleiner als 100, damit sind 76 - 7 = 69 dreistellige Vielfache von 13.

Übungsaufgabe:
Eine AF beginnt mit 16, 21, …. . Wie heisst a_{100}?
$a_n = 11 + 5n$ $\qquad a_{100} = 511$

Aufgabe:
Vor einer AF kennt man $a_6 = 13$ und $a_{14} = 45$. Wie heisst a_{50}?

Das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} a_6 = a_1 + 5d \\ a_{14} = a_1 + 13d \end{vmatrix}$$

hat die Lösungen $d = 4$ und $a_1 = -7$. Somit ist $a_{50} = a_1 + 49d = 189$.

Aufgabe:
Gegeben die AF 9, 6, ... Für welche natürliche Zahl n gilt erstmals $a_n < -100$

Lösung: $n \geq 38$

Die Summenformel

Laut einer Anekdote soll Gauss (1777 - 1855), Princeps mathematicorum genannt, als 8-jähriger von seinem Lehrer die folgende Aufgabe erhalten haben:

Aufgabe:
Es ist die Summe der n ersten natürlichen Zahlen gesucht.

Idee von Gauss:

Die Summe wird auf zwei verschiedene Arten geschrieben

s = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100

s = 100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1 addieren

2s = 101 + 101+....... + 101+ 101 100 Summanden (1 + 100) = 101

2s = 10'100 oder s = 5050

Verallgemeinerung auf eine beliebige arithmetische Folge mit n = 4

$s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ Die Summanden verändern sich um d

$s_5 = a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$ Die Summanden verändern sich um -d
Die Summe in jeder Spalte verändert sich damit nicht.

$2s_5 = 5 \cdot (a_1 + a_5)$ $s_5 = \frac{5}{2} \cdot (a_1 + a_5)$

und durch induktives Schliessen

$$\boxed{\textbf{(2)} \quad \boldsymbol{s_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n)}}$$

Summe der n ersten Glieder einer AF, auch arithmetische Reihe genannt
n Anzahl Summanden
a_1 Anfangsglied
a_n letztes Glied

Beispiel:
s = 17 + 19 + 21 + ….. + 41 + 43 + 45 = ?
$a_1 = 17 \quad a_n = 17 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 15 = 45 \quad n = 15$
$s = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (17 + 45)$ (ac)