

8. Anwendungen aus der Finanzmathematik

8.1 Periodische Zahlungen: Renten und Leasing

Unter einer Rente versteht man eine regelmässige und konstante Zahlung.

Beispiele:

Monatliche Krankenkassenprämie, monatliche Altersrente, periodisches Sparen, vierteljährlicher Hypothekarzins, jährliche Tilgung (Abzahlung einer Schuld).

Fragestellungen:

Endwert: Kapital mit Zinseszins nach n Zahlungen?

Barwert: Welche einmalige Zahlung ist zu den n Zahlungen äquivalent?

Mathematische Grundlage:

Summenformel der geometrischen Reihe

Begriffe:

Bei vorschüssigen Renten erfolgen die Zahlungen am Anfang der Periode, bei nachschüssigen am Ende der Periode.

Zur Abkürzung schreiben wir i für $\frac{p}{100}$.

Aufgabe:

Berechne den Endwert von n nachschüssigen Zahlungen Skizze: $n = 6$

Zeitpunkt Zahlung Wert am Ende des n -ten Jahres

Zeitpunkt	Zahlung	Wert am Ende des n -ten Jahres	
1	R	$R(1+i)^{n-1}$	1. Zahlung
2	R	$R(1+i)^{n-2}$	2. Zahlung
.			
.			
.			
.			
$n-1$	R	$R(1+i)$	5. Zahlung
n	R	R	6. Zahlung

Für den Endwert von n nachschüssigen Zahlungen gilt damit:

$$E_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Erfolgen die Zahlungen vorschüssig, so multipliziert sich der Endwert E_n mit $(1+i)$

Beispiel:

Göttibatzen am Jahresende: $n = 20$, $R = 100$, $i = 0.04$

$$E_{20} = 100 \cdot \frac{1.04^{20} - 1}{0.04} \approx 2977.80 \text{ Fr.}$$

8.2 Beispiel Pensionskasse

Übersicht

3 - Säulenprinzip der Vorsorge	1 AHV 2 Pensionskasse (PK) 3 Privates, teilweise steuerbegünstigtes Sparen
Versicherungsleistungen der PK:	Alter und Invalidität der versicherten Person, des Ehepartners und der Kinder Austrittsleistung bei Stellenwechsel (Freizügigkeit) Finanzierung von Wohneigentum Anpassungen bei Änderungen des Lohns (real oder Ausgleich der Inflation) oder des Beschäftigungsgrades durch Einkauf resp. Freizügigkeit

Verfahren:

Die Mindestanforderungen sind im Berufsvorsorgegesetz (BVG) festgelegt. Im Gegensatz zum Umlageverfahren bei der 1. Säule werden die Prämien kapitalisiert.

Beim **Beitragsprimat** wird der Beitrag festgelegt, die Leistung (Pension) ergibt sich aus dem Endwert der Beiträge.

Beim **Leistungsprimat** wird die Leistung festgelegt. Daraus werden die Beiträge berechnet. Der "Technische Zinssatz" betrug im Jahr 2008 4%

Es besteht der Trend vom Leistungsprimat zum Beitragsprimat, denn Anpassungen sind beim Leistungsprimat kompliziert und "gute" Leistungen sind teuer.

Beitragsberechnung beim Leistungsprimat (vereinfacht)

Gegeben: Jährliche vorschüssige Rente R während n Jahren.

Gesucht: Jährliche nachschüssige Prämie P während m Jahren.

Die Prämie ist so festzulegen, dass der Barwert der Renten mit dem Endwert der Prämien übereinstimmt.

Beispiel:

Wie hoch ist die während 35 Jahren zu bezahlende Prämie für eine Rente von Fr. 36'000.-, die während 15 Jahren bezogen wird (Zinssatz $i = 4\%$)?

Barwert vorschüssig:

$$B_v = 36000 + \frac{36000}{r} + \frac{36000}{r^2} + \dots + \frac{36000}{r^{14}} = 36000 \cdot \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{14}} \right)$$

$$= 36000 \cdot \left(\frac{1 + r + r^2 + \dots + r^{14}}{r^{14}} \right) = \frac{36000}{r^{14}} \cdot \frac{r^{15} - 1}{r - 1} = \frac{36000}{1.04^{14}} \cdot \frac{1.04^{15} - 1}{1.04 - 1}$$

$$B_v = 36000 \frac{1.04^{15} - 1}{0.04 \cdot 1.04^{14}} = 416272$$

$$\text{Endwert nachschüssig: } E_n = P \frac{1.04^{35} - 1}{0.04} = B_v \Rightarrow P = 5652$$

Bemerkung:

Der gesetzliche Mindestumwandlungssatz betrug 2008 6.8%. Im fiktiven Beispiel beträgt der Umwandlungssatz $\cdot \frac{36000}{416272} \approx 8.6\%$.

Flexibles Rentenalter (Rentenkürzung bei vorzeitiger Pensionierung)

Beispiel:

Jahresprämie $P = 9600$ - Fr. , Jährliche Rente: $R = 48'000$ - Fr. während 15 Jahren,
Zinssatz: $i = 4\%$.

Um welchen Betrag ist die Rente zu kürzen, wenn die Rente 2 Jahre früher bezogen wird?

Bei der Berechnung des Barwerts der Renten sind zu berücksichtigen:

- (1) 2 fehlende Prämien und die Verzinsung des Kapitals
- (2) Der Rentenbezug verlängert sich um 2 Jahre.

$$(1) \text{ Bisheriger Barwert: } B_v = 48000 \frac{1.04^{15} - 1}{0.04 \cdot 1.04^{14}} = 555'000$$

$$\text{Neuer Barwert. } B_{neu} = \frac{B_v}{1.04^2} - \frac{P}{1.04^2} - \frac{P}{1.04} = 495'050$$

$$(2) \text{ Neue Rente: } R_{neu} \cdot 1.04 \cdot \frac{1.04^{17} - 1}{0.04 \cdot 1.04^{17}} = 495'050 \quad R_{neu} = 39'127$$

Dies bedeutet eine Kürzung von ungefähr 18%.

Zum Vergleich:

Gemäss den Vorschlägen der 11. AHV-Revision soll die Kürzung ab einem Einkommen von 72'000.- 11% betragen (Ungekürzte Rente 24'000.-)

Übungsaufgabe:

Ein (fiktiver) Arbeitnehmer mit einer versicherten Jahresbesoldung von Fr. 80 000.- arbeitet ab Alter 25 während 40 Jahren. In die Pensionskasse werden am Jahresende Fr. 4800.- bezahlt (die Beiträge werden teilweise vom Arbeitgeber übernommen). Die Sollrendite betrage 4.5%. Der gesetzliche Mindestumwandlungssatz betrage 6.8%.

- a) Wie gross ist sein Vorsorgevermögen bei seiner Pensionierung nach 40 Jahren?
- b) Welche BVG-Rente wird er damit jährlich erhalten?
- c) Für wie viele (zu Jahresbeginn ausbezahlte) Renten reicht das Vorsorgevermögen theoretisch aus?

Lösung:

$$a) 4800 \cdot (1.045^{39} + \dots + 1) \approx 513745.55 \text{ Fr.}$$

$$b) 34\,934.70 \text{ Fr.}$$

$$c) 513\,745.55 = 34\,934.70 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1.045}\right)^n}{1 - \frac{1}{1.045}} \quad n \approx 23 \text{ Jahre}$$

8.3 Effektiver Zinssatz bei Kleinkrediten

Aufgabe:

Bei einem Kredit von 10000 Fr. sei eine Laufzeit von 5 Jahren und eine jährliche Rückzahlrate am Jahresende von 2500 Fr. vereinbart. Wie gross ist der effektive Zinssatz?

Interpretation 1:

Die Leistung der Bank und die Leistung des Kunden werden auf getrennten Konten mit gleichem Zinssatz geführt. Die beiden Kontostände müssen nach 5 Jahren übereinstimmen.

Interpretation 2:

Die jährlichen Zahlungen des Kunden werden einem Konto jährlich gutgeschrieben, das zu Beginn mit 10000 Fr. belastet war. Verzinst wird die Restschuld, die nach 5 Jahren zu Null werden soll.

Für den Aufzinsfaktor $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i$ muss dann gelten:

$$10000r^5 = 2500 \cdot (r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)$$

Diese Gleichung ist nicht elementar lösbar. Ein Näherungsverfahren z.B. das Newtonverfahren ergibt als effektiven Zinssatz 7.9%.

Bei Kleinkrediten (ProntoKredit) werden üblicherweise monatliche Zahlungen verlangt, die erste Rate $R = 451$ Fr. einen Monat nach Auszahlung des Kreditbetrags $D = 10000$ Fr. Für den effektiven Jahreszinssatz p gilt dann bei einer Laufzeit von 24 Monaten die Gleichung:

$$D \cdot q^{24} = R \cdot q^{23} + R \cdot q^{22} + \dots + R \cdot q + R = R \cdot \frac{q^{24} - 1}{q - 1}$$

mit dem monatlichen Wachstumsfaktor $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{12}}$ (*)

Auch diese Gleichung ist nicht elementar lösbar. Ein Näherungsverfahren ergibt als effektiven jährlichen Zinssatz 8.0%

...zu einem Kredit!

Alles was Sie über eine Ratenfinanzierung wissen sollten.

brauchen Sie Geld, um ein Projekt zu realisieren, Immobilien zu restaurieren, eine Wohnung zu möblieren, einen Kauf zu tätigen oder ein Ziel zu erreichen, von welchem Sie immer geträumt haben oder ganz einfach, um über finanzielle Mittel verfügen zu können? Gerne stehen wir Ihnen mit unserer **professionellen Beratung** zur Seite.

Rechnungsbeispiel mit einem Zinssatz von 7,9%:

Kreditbetrag	Laufzeit	Gesamtzins	Zinsrate
CHF 10'000.-	12 Monate	CHF 418.40	CHF 868.20

Zinsrate inkl. aller Spesen. Bei vorzeitiger Rückzahlung restliche Zinsrückvergütung.

Auch bei bestehenden Krediten
Angestellte, Temporär
AHV/IV Rentner / Selbständige
Ausweis L / B / G / C / CH

ab **7,9%**
bis **9,95%**

Anmerkung zu (*):

Wie die folgende Tabelle zeigt (1000 Fr. am Jahresanfang, Jahreszinssatz 6%), bedeutet p%-Wachstum im Jahr eben nicht auch $\frac{p}{12}$ %-Wachstum im Monat. Der Zinsfaktor ist der etwas

kleinere Faktor $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{12}}$

Sonst wäre etwa das Wachstum im zweiten Halbjahr von 1030 auf 1060 kleiner (2.91%) als das des ersten Halbjahrs). Verzinstes Geld ist somit als eine stetig exponentiell wachsende Grösse zu betrachten. Zu jedem Zeitpunkt wird der gesamte bis dahin angewachsene Geldbetrag inklusive Zins mitverzinst.

Zeitpunkt	linear	exponentiell	Differenz	Wachstumsfaktor monatlich
				1.004867551
0	1000	1000.00	0.00	
1	1005	1004.87	-0.13	
2	1010	1009.76	-0.24	
3	1015	1014.67	-0.33	
4	1020	1019.61	-0.39	
5	1025	1024.58	-0.42	
6	1030	1029.56	-0.44	
7	1035	1034.57	-0.43	
8	1040	1039.61	-0.39	
9	1045	1044.67	-0.33	
10	1050	1049.76	-0.24	
11	1055	1054.87	-0.13	
12	1060	1060.00	0.00	
Totale Differenz			-3.47	

8.4 Emissionspreis einer Obligation am Beispiel der CoY-Anleihe in der Beilage

(Quelle: Erwin W. Heri: Was Anleger auch noch wissen sollten, Helbling u. Lichtenhahn 1996)

Die Anleihe (Obligation, Bond) (vgl. Abbildung auf der nächsten Seite) verspricht jährliche Zinszahlungen (Annuitäten) von $C = 5000$ Fr. und in $n = 10$ Jahren die Rückzahlung von $T = 100'000$ Fr. (Tilgung).

Der Barwert der Zinszahlungen (Annuitäten) beträgt

$$E_A = C \cdot \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} = C \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} = \frac{C}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

Der Barwert der Rückzahlung beträgt

$$E_T = \frac{T}{(1+i)^n}$$

Für den Emissionspreis E gilt damit:

$$E = E_A + E_T = \frac{C}{i} - \frac{C}{i \cdot (1+i)^n} + \frac{iT}{i \cdot (1+i)^n} = \frac{C}{i} + \frac{iT - C}{i \cdot (1+i)^n} \quad (*)$$

Couponzahlung $C = 5000$ Fr., Tilgungsbetrag $T = 100'000$ Fr., Laufzeit $n = 10$ Jahre. Marktzins i .

Der vom Marktzins (Diskontsatz) abhängige Marktpreis entspricht also dem Barwert aller zukünftigen Zahlungsverprechen (dem sogenannten abdiskontierten Wert dieser Zahlungen). Dieser Grundsatz hat bei der Bewertung von finanziellen Verträgen Gültigkeit. Im Beispiel ergibt sich bei einem Marktzins von $i = 0.0497$ der Emissionspreis von 100240 Fr., was einem Emissionskurs von 100.25% entspricht. In der Praxis ist umgekehrt der Marktpreis der Obligation gegeben und der Marktzins gesucht. Die Gleichung (*) in i ist allerdings nur mit Näherungsverfahren lösbar.

Bei Erhöhungen des Zinsniveaus sinken die Bondpreise (die zukünftigen Zahlungsströme werden stärker abdiskontiert). Entsprechend steigen bei sinkendem Zinsniveau die Bondpreise (die zukünftigen Zahlungsströme werden geringer abgezinst).

The City of Yokohama

Japan

mit Solidarbürgschaft der japanischen Regierung

5% Anleihe 1987-97 von SFr. 100 000 000

- Die City of Yokohama ist eine lokale, öffentliche Körperschaft mit einer von der japanischen Verfassung garantierten Autonomie.
- Mit rund 3,1 Millionen Einwohnern ist Yokohama die zweitgrösste Stadt Japans.
- Yokohama besitzt den grössten Hafen Japans.

Laufzeit:	längstens 10 Jahre
Emissionspreis:	100,25% + 0,3% eidg. Umsatzabgabe
Coupons:	5% p.a., zahlbar jährlich am 10. Dezember
Rückzahlung:	spätestens 10. Dezember 1997
Vorzeitige Rückzahlungsmöglichkeiten	<p>a) Unter Einhaltung einer Kündigungsfrist von mindestens 60 Tagen ohne Grundangabe ab 10. Dezember 1992 zu 101,50% (degressiv 1/2% p.a.) und ab 10. Dezember 1994 zu 100,50% (degressiv 1/2% p.a. bis zum Nennwert).</p> <p>b) Bei Einführung einer Quellensteuer in Japan ist die Emittentin berechtigt, unter Einhaltung einer Kündigungsfrist von mindestens 60 Tagen sämtliche Obligationen zurückzuzahlen. Eine solche Rückzahlung kann ab 10. Dezember 1988 zu 102% erfolgen, mit jährlich 1/2% degressiven Prämien bis zum Nennwert, zuzüglich der bis zum Rückzahlungstermin aufgelaufenen Zinsen.</p>
Sicherstellung:	<p>a) Solidarbürgschaft der japanischen Regierung</p> <p>b) Negativklausel</p>
Stückelung:	Titel zu SFr. 5000 und SFr. 100 000
Zeichnungsschluss:	27. November 1987, mittags
Liberierung:	10. Dezember 1987
Steuerstatus:	Jegliche Zahlung von Zinsen, Kapital und allfälligen Prämien erfolgt ohne Abzug von irgendwelchen an der Quelle zurückbehaltenen gegenwärtigen oder zukünftigen Steuern, Abgaben oder Gebühren.
Verkaufsrestriktionen:	Japan und Vereinigte Staaten von Amerika

Zeichnungsangebot

Die unterzeichneten Institute haben die vorbeschriebene

5% Anleihe 1987-97 von SFr. 100 000 000 der City of Yokohama, Japan mit Solidarbürgschaft der Japanischen Regierung

fest übernommen und legen sie bis zum

27. November 1987, mittags

zu den nachstehenden Bedingungen zur öffentlichen Zeichnung auf:

1. Der **Emissionspreis** beträgt **100,25%**, zuzüglich 0,3% eidg. Umsatzabgabe.
2. Die **Zeichnungen** werden durch die schweizerischen Geschäftsstellen der unterzeichneten Institute spesenfrei entgegengenommen.
3. Die **Zuteilung** steht im Ermessen der untenstehenden Institute. Sie werden die Zeichner so bald als möglich nach Zeichnungsschluss hierüber unterrichten.
4. Die **Liberierung** der zugeteilten Titel hat am 10. Dezember 1987 zu erfolgen.
5. Die **Titel** werden so bald als möglich geliefert.
6. **Verkaufsrestriktionen:** Japan und Vereinigte Staaten von Amerika.

19. November 1987

Schweizerische Kreditanstalt	Schweizerische Bankgesellschaft	Schweizerischer Bankverein
Bank of Tokyo (Schweiz) AG		Yokohama Finanz (Schweiz) AG
Schweizerische Volksbank	Bank Leu AG	Vereinigung der Genfer Privatbankiers Gruppe Zürcher Privatbankiers
Bank Sarasin & Cie	Privatbank & Verwaltungsgesellschaft	
Schweizerische Kantonalbanken		Banca della Svizzera Italiana
Bank Hofman AG	Bank Cantrade AG	Schweizerische Depositen- und Kreditbank
Banque Romande		
The Nikko (Switzerland) Finance Co., Ltd.		Nomura (Switzerland) Ltd.

Valorm-Nr.: 769-592

Zeichnungsscheine für diese Anleihe können bei den oben erwähnten Instituten bezogen werden.