7. Geometrische Folgen (exponentielles Wachstum)

Beispiele:

2, 6, 18, 54, 162, ... $q = 3$ $6 = \sqrt{2 \cdot 18}$

8, -4, 2, -1, ,$\frac{1}{2}$, ... $q = -\frac{1}{2}$, das Vorzeichen wechselt ab (alternierende Folge)

1, -1, 1, -1, ... $q = -1$

Definition:

Eine Folge, bei welcher der **Quotient** zweier aufeinanderfolgender Glieder immer gleich gross ist, heisst geometrische Folge (GF).

$\boxed{\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a_{n+1} = a_n \cdot q} \quad a_1 \neq 0,\ q \neq 0}$ Rekursive Definition einer geometrischen Folge

Der Name kommt daher, weil bei einer GF der absolute Betrag jedes Gliedes das geometrische Mittel seiner Nachbarglieder ist.

$$\boxed{|\boldsymbol{a_n}| = \sqrt{\boldsymbol{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}}}$$

Gegenüberstellung von arithmetischen und geometrischen Folgen an einem Beispiel:

	a_1	a_2	a_3		
arithmetische Folge	$6 \xrightarrow{+d}$	$30 \xrightarrow{+d}$	54	lineares Wachstum	$d = 24$
		$30 = \frac{1}{2} \cdot (6 + 54)$		arithmetisches Mittel	
geometrische Folge	$6 \xrightarrow{\cdot q}$	$18 \xrightarrow{\cdot q}$	54	exponentielles Wachstum	$q = 3$
		$18 = \sqrt{6 \cdot 54}$		geometrisches Mittel.	

Explizite Formel für das n-te Glied einer GF:

a_1 $a_2 = a_1 \cdot q$ $a_3 = a_1 \cdot q^2$

und durch induktives Schliessen

$$\boxed{(1) \quad \boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}}$$

a_1 Anfangsglied
a_n Endglied
q Quotient
n Anzahl Glieder

Beweis mit → Vollständiger Induktion.

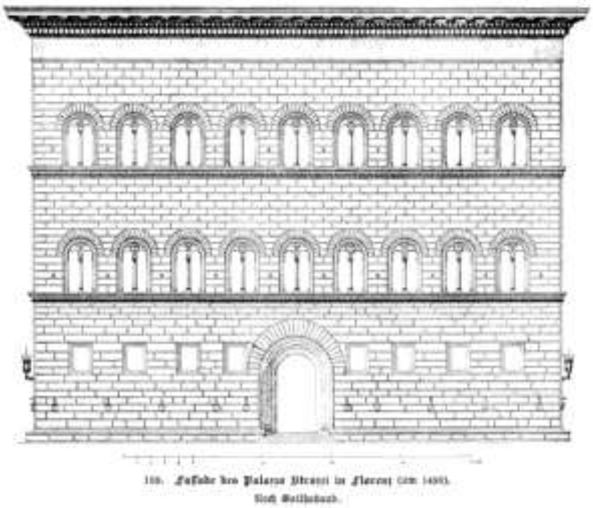
Bei einer GF wachsen die Beträge der Glieder exponentiell. Stellt man die Punkte $(n, |a_n|)$ in einem Koordinatensystem dar, so liegen die zugehörigen Punkte auf der Exponentialkurve mit der Gleichung

$y = \frac{a_1}{q} \cdot q^n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Übungsaufgabe:
Zwischen 2430 und 5760 sind zwei Zahlen so einzuschalten, dass
a) eine arithmetische b) ein geometrische Folge entsteht.
Lösung:

a) 2430	3540	4650	5760	d = 1110
b) 2430	3240	4320	5760	$d = \frac{4}{3}$

Die Höhe der Stockwerke eines Hauses ordnete man im Mittelalter nach dem Aufbau einer geometrischen Folge an. Beim Palazzo Strozzi, Florenz nach einem Entwurf von Benedetto de Maiano (1489-1530) ist q = $\frac{5}{6}$.



Aufgaben:
a)
Von einer GF kennt man $a_4 = 27$ und $a_{13} = 729$. Wie heisst das erste Glied a_1?

Aus
$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad = 27$ (1)
$a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = 729$ (2)
Dividiert man beide Seiten so folgt:

$q^3 = 3$ und wegen (1) $a_1 = \frac{a_4}{q^3} = 9$

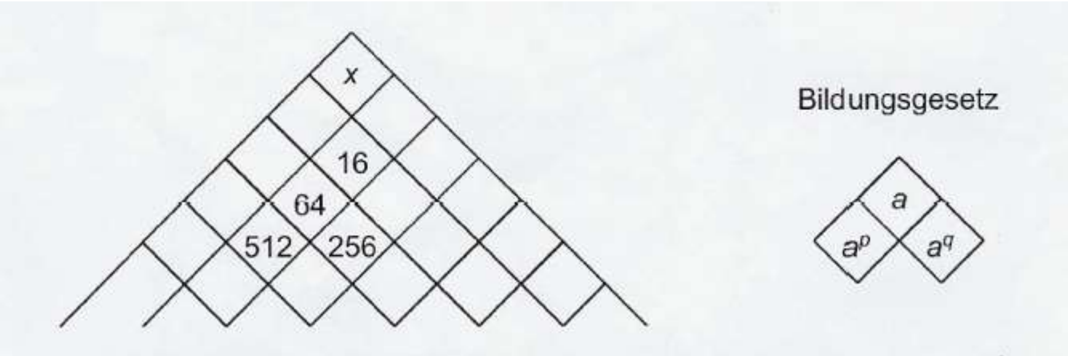
b)
Von einer GF kennt man $a_1 = \sqrt[3]{a}$ und $a_2 = \sqrt{a}$ Wie heisst a_{11}?

$$q = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} \qquad a_{11} = a_1 \cdot q^{10} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{10}{6}} = a^2$$

c)
Von welchem Glied an, sind die Glieder der GF $a_1 = 1$ und $a_2 = 1.1$ $a_1 = 1$ grösser als 10^3?

$1.1^{n-1} \geq 10^3$ logarithmiert zur Basis 10:
Aus $(n-1) \cdot log_{10}1.1 \geq 3$ folgt $n \geq \frac{3}{log_{10}1.1} + 1 \approx 73.4$
a_{74} ist erstmals grösser als 10^3.

Aufgabe:
Die positiven Zahlen im abgebildeten Schema sind nach dem angegebenen Bildungsgesetz entstanden. Wie ist x zu wählen?



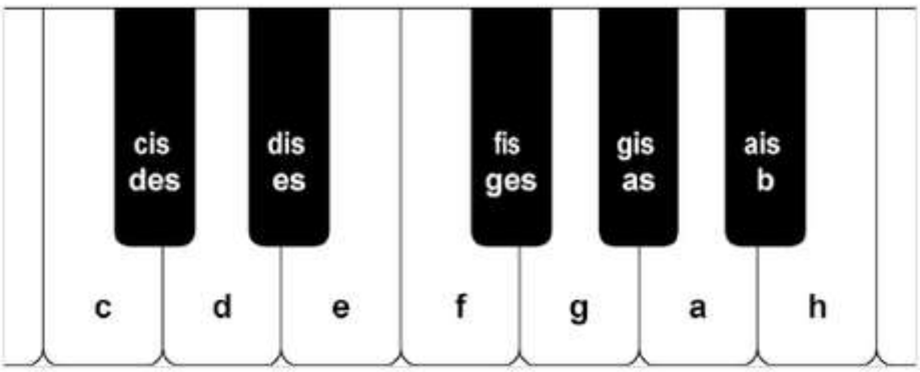
$16^p = 64 \qquad (2^4)^p = 2^{4p} = 2^6 \qquad p = \frac{3}{2}$

$64^q = 256 \qquad (2^6)^q = 2^{6q} = 2^8 \qquad q = \frac{4}{3}$

$(x^p)^q = x^{pq} = x^2 = 16 \qquad x = 4$

Aufgabe:
Bei der "gleichschwebenden" ("temperierten") Stimmung eines Klaviers besteht die Oktave aus 12 Halbtonschritten, die Frequenzen dieser Töne bilden eine geometrische Folge.

a) Welche Frequenzen haben die Töne der A-Dur-Tonleiter, wenn der Grundton a' eine Frequenz von 440 Hz, die Oktave a" also 880 Hz hat?
b) Die "reine" Quinte hat die $\frac{3}{2}$-fache Frequenz des Grundtons. Wie gross ist die Differenz zwischen den Frequenzen der "temperierten" und der "reinen" Quinte.



Klaviertastatur einer Oktave

a´ b´ h´ c´ cis´ d´ d´ dis´ e´ f´ fis´ g´ gis´ a´´
a´ = 440 Hz a´´ = 880 Hz

Wegen $880 = 440 \cdot q^{12}$ ist $q = 2^{\frac{1}{12}}$ also $e´ = 440 \cdot q^7 \approx 659.3$.
Bei der diatonischen Tonleiter entspricht der Quinte das Frequenzverhältnis $\frac{3}{2}$ also e = 660 Hz.

Vgl. etwa http://de.wikipedia.org/wiki/Stimmung_(Musik)

Zur Vorbereitung der Summenformel:

$s_5 \;\; = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4$ multipliziert mit q

$qs_5 = \qquad a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5$

Das (-1)-fache der 1. Gleichung wird zur zweiten addiert:

$-s_5 + q \cdot s_5 = s_5 \cdot (q-1) = -a_1 + a_1 \cdot q^5 = a_1 \cdot (q^5 - 1)$

damit gilt:

$s_5 = a_1 \cdot \frac{q^5-1}{q-1}$ oder mit (-1) erweitert $s_5 = a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q}$

Durch induktives Schliessen ergibt sich:

Satz:
Für die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Folge gilt:

(2) $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q \neq 1$

Schachbrett-Anekdote:
Sessa, der Erfinder des Schachspiels, soll sich von Scheram, einem indischen König folgende Belohnung erbeten haben: Die Summe der Reiskörner, die sich ergibt, wenn man auf das 1. Feld des Schachbrett 1 Korn legt und die Anzahl der Reiskörner beim nächsten Feld verdoppelt.

Gesamtzahl der Reiskörner $s_{64} = 2^{64} - 1$
Der Zehnerlogarithmus von s_{64}ist ungefähr gleich $lg\, 2^{64} = 64 \cdot lg 2 \approx 19.266$
also gilt: $s_{64} \approx 1.8 \cdot 1019$ die gesuchte Zahl hat also 20 Stellen.
Tatsächlich gilt: $s_{64} = 18'446'744'073'709'551'615.$

Die Gesamtzahl der Körner kann auch ohne Summenformel berechnet werden. Legt man nämlich auf das 1. Feld ein zusätzliches Reiskorn, so ist die Anzahl der Reiskörner ab dem 2. Feld gerade gleich der Summe der Reiskörner für alle vorhergehenden Felder!

Um einen Eindruck von der Grössenordnung dieser Zahl zu erhalten, treffen wir folgende Annahmen:
16'000 Reiskörner entsprechen einem kg, ein Eisenbahnwagen fasse 10 t Reis, die Länge des Eisenbahnwagens sei 10m. Fährt der mit diesen Reiskörnern beladene Zug mit 100 km/h vorbei, so müsste man etwa 1300 Jahre bis zur Vorbeifahrt des letzten Wagens warten.

Aufgabe: Rauchen und Nikotin
Für den Abbau von Nikotin im Körper werden folgende Annahmen getroffen (ohne Gewähr):
1. Der Abbau erfolgt exponentiell
2. Beim Rauchen einer Zigarette werden 5 mg Nikotin aufgenommen, wobei nach einer Stunde noch 4 mg vorhanden sind.

Jemand raucht jede Stunde eine Zigarette. Wieviel Nikotin hat sich im Körper nach 14 ½ Stunden nach dem Rauchen der ersten Zigarette angesammelt?

Nach n Stunden wurden n+1 Zigaretten geraucht, es befinden sich also
$5 + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n = 5 \cdot \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}$ mg Nikotin im Körper.

nach 14 h also $5 \cdot \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{15}}{1-\frac{4}{5}} \approx 24.12\ mg$

nach einer weiteren halben Stunde also noch $24.12 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 21.6\ mg$

Übungsaufgabe:
Im Jahre 1994 betrug der Verbrauch an Erdgas 1 824 Einheiten (Millionen Tonnen Erdöläquivalent). Am Ende jenes Jahres wurden 128 300 Einheiten an Reserven geschätzt. Wie lange reichen die Reserven, wenn der Verbrauch jährlich um 2% steigt?

Lösung:
Verbrauch 1995: $1.824 \cdot 1.02$
$1.824 \cdot 1.02 \cdot \frac{1.02^n - 1}{0.02} = 128\,300$
$n = ln\left(\frac{128300 \cdot 0.02}{1824 \cdot 1.02} + 1\right) : \ln 1.02 \approx 43.77$
Mit den vorgegebenen Annahmen wären die Reserven nach ca. 44 Jahren aufgebraucht.