3. rekursive Definition einer Folge

In vielen Fällen ist eine explizite Formel für das n-te Glied nicht bekannt, es ist hingegen möglich, aus den gegebenen Gliedern das nächste Glied zu berechnen, d.h. es kann eine sogenannte Rekursionsformel angegeben werden (recurrere lat. zurücklaufen).

a) $a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n + 2$
b) $a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ oder $a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2$
c) $a_1 = 2$ $a_{n+1} = a_n \cdot 2$
d) nicht bekannt
e) $a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n \cdot (n+1)$ führt für n = 0 auf die Definition 0! = 1
f) $a_1 = a_2 = 1$ $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ Fibonaccifolge
g) $a_1 = 2$ $a_{n+1} = a_n + 3$
h) -
i) $a_1 = -1$ $a_{n+1} = -a_n$
j) $a_1 = 8$ $a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n$
k) -
l) $a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+1}$
m) $a_1 = 1$ $a_{n+1} = 2a_n + 1$
n) Bildungsgesetz: Der Nachfolger gibt die Anzahl der Ziffern des Vorgängers an:
1 „1 mal 1“
11 „zweimal 1“
21 „einmal 2, einmal 1“
1211: „einmal 1, einmal 2, zweimal 1“
111221, ….

Definition:
Eine Folge heisst rekursiv definiert, wenn das allgemeine Glied a_n durch einen oder mehrere Vorgänger ausgedrückt wird.

Übungsaufgaben:
a)
Berechnen Sie einige Glieder der rekursiv definierten Folge mit
$a_1 = 20$ $a_{n+1} = 2a_n - 3$
b)
Beschreiben Sie die Folge 3, 33, 333, 3333, … rekursiv und explizit.

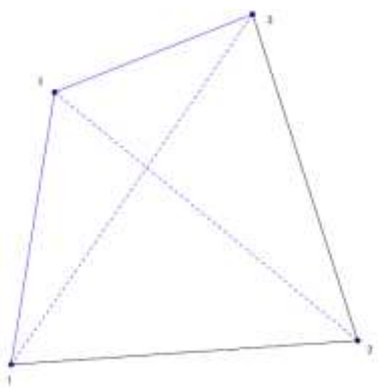
Lösungen:
a)
$a_2 = 37, a_3 = 71, , a_3 = 139$
b)
rekursiv: $a_1 = 3$ $a_{n+1} = 10a_n + 3$
explizit: $a_n = \frac{1}{3} \cdot (10^n - 1)$

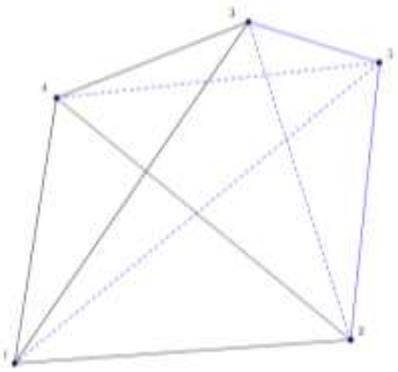
Aufgabe:
Sei a_n die Anzahl der Händedrucke, wenn sich n Personen begrüssen ($n \geq 2$).
Definieren Sie a_n rekursiv.

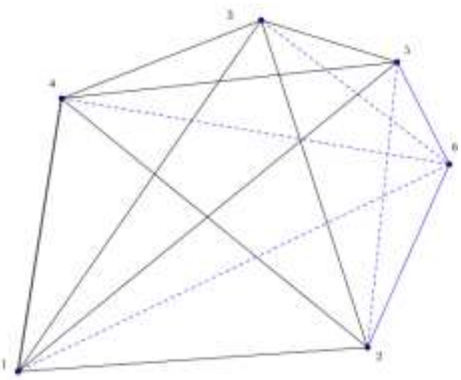
$a_2 = 1 \qquad a_{n+1} = a_n + n$ $a_2 = 1$

Kommt nämlich zu n Personen eine weitere dazu, so drückt sie mit jeder der bisherigen n Personen die Hand.

Aufgabe:
Bestimmen Sie die Anzahl der Diagonalen eines konvexen Vierecks, Fünfecks, Sechsecks?
Leite eine Rekursionsformel für die Anzahl d_n der Diagonalen eines n-Ecks her.







$d_4 = 2$ $\qquad d_5 = d_4 + 4 - 2 + 1 = 5$ $\qquad d_6 = d_5 + 5 - 2 + 1 = 9$

Allgemein:
$d_{n+1} = d_n + n - 2 + 1 \; = \; d_n + n - 1$

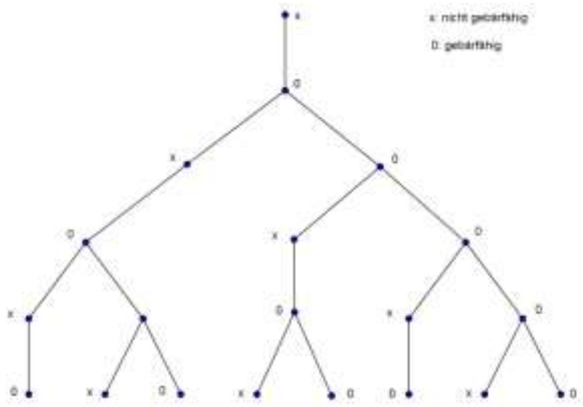
Eine weitere Ecke bestimmt mit den n bisherigen Ecken n zusätzliche Strecken. Die beiden Verbindungen zu den benachbarten Ecken fallen als Seiten weg. Eine bisherige Seite wird zur Diagonale.

Explizite Formel:
Jede der n Ecken kann mit den $(n-1)$ übrigen Ecken verbunden werden. Zwei dieser Verbindungen fallen als Seiten weg. Bei dieser Betrachtung wird jede Diagonale doppelt gezählt (z.B. Verbindung von Ecke 1 mit Ecke 2 und in der umgekehrten Reihenfolge). Damit gilt:
$d_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$

Ergänzungen zu den Beispielen:

zu f) Fibonaccifolge:
Im Jahre 1202 erschien das Buch "liber abaci" über den Gebrauch des Zehnersystems des Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (Figlio di Bonaccio). Dort wird die Vermehrung eines Kaninchenpaares in Abhängigkeit von der Zeit in folgender Weise beschrieben:
Ein zur Zeit 0 geborenes Kaninchenpaar wirft vom 2. Monat an in jedem Monat ein weiteres Paar. Die Nachkommen folgen dem Vorbild der Eltern. Wenn alle Kaninchen überleben, wird die Anzahl der Kaninchen nach n Monaten durch die Fibonaccifolge beschrieben.

Monat	
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8



Eine andere Interpretation der Fibonaccifolge:
Ein Briefträger steigt täglich eine lange Treppe folgendermassen empor: Er betritt die erste Stufe in jedem Fall. Anschliessend nimmt er jeweils nur eine Stufe oder zwei Stufen auf einmal. Dann kann er genau auf f_n Arten die n-te Stufe erreichen, wo f_n das n-te Glied der Fibonaccifolge ist.
Ist nämlich f_n die Anzahl der Möglichkeiten, die n-te Stufe zu erreichen. Bekannt sind $f_1 = f_2 = 1$. Die $(n+2)$-te Stufe kann er auf zwei Arten erreichen. Im ersten Fall kommt er von der $(n+1)$-ten Stufe, die auf f_{n+1}Arten erreicht werden kann oder er kommt von der n-ten Stufe her, die auf f_n Arten erreicht werden kann. Damit gilt $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ in Übereinstimmung mit dem Bildungsgesetz der Fibonaccifolge.

Ergänzende Informationen zur Fibonaccifolge:
- Stammbaum de Drohne
- Blattstellungsmuster bei Pflanzen und Fibonaccifolge, Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt (siehe z.B. Wikipedia: Phyllotaxis, goldener Schnitt)
- Abbildung der Fibonaccifolge in der Eingangshalle des Hauptbahnhofs Zürich (Mario Merz)
- Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen strebt alternierend gegen das Verhältnis 1.61803.. des goldenen Schnitts: $\frac{8}{5} = 1.6$, $\frac{13}{8} = 1.625$, $\frac{21}{13} \approx 1.615$ ...

zu e) (Fakultäten)
$1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1! = 2$, $3! = 3 \cdot 2! = 6$, $4! = 4 \cdot 3! = 24$, $5! = 5 \cdot 4! = 24$

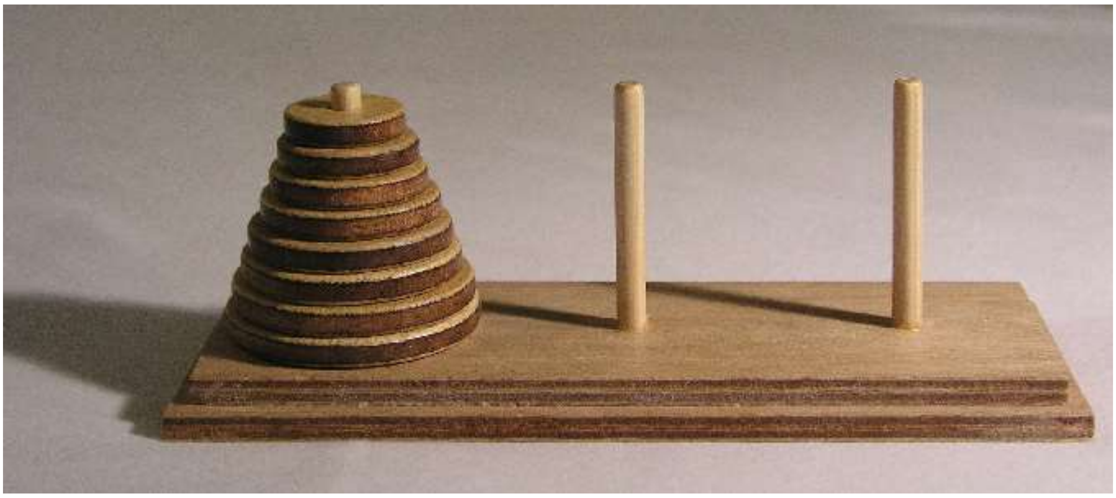
Die Anzahl der Sitzordnungen für n Personen auf n Stühlen ist gerade $n!$. Die Rekursionsformel kann folgendermassen kombinatorisch interpretiert werden. Kommt zu n Personen eine weitere (mit Stuhl) dazu, so entstehen aus jeder bisherigen Sitzordnung $n + 1$ neue. Die Person kann nämlich am Anfang, in den $n - 1$ Zwischenräumen oder am Ende Platz nehmen.

Das rasche Wachstum der Fakultäten zeigt der folgende Vergleich:
11 Personen können auf 11! = 39'916'800 Arten Platz nehmen. Vier Kantijahre zu 365 Tagen sind 4·365·24·60·60 = 126'144'000 Sekunden. Wechselt eine Abteilung von 11 SchülerInnen alle 3 Sekunden die Plätze, so würde sie es in 4 Jahren gerade schaffen, alle Sitzordnungen einzunehmen.

Auf der folgenden Seite sind die 2568 Ziffern von 1000! aufgeführt.
Die Zahl endet mit 249 Nullen. Eine Null entsteht nämlich, wenn die Zahl durch 2 und 5 teilbar ist. Da ausreichend Faktoren 2 auftreten, ist die Zahl der Faktoren 5 massgebend. Von den 1000 natürlichen Zahlen enthalten 200 den Faktor 5 einfach, 40 den Faktor 5 doppelt, 8 den Faktor dreifach und 1 vierfach, also insgesamt 200 + 40 + 8 + 1 = 249 Faktoren 5.

402387260077093773543702433923003985719374864210714632543\
799910429938512398629020592044208486969404800479988610
197196058631666872994808558901323829669944590997424504
087073759918823627727188732519779505950995276120874975
462497043601418278094646496291056393887437886487337119
181045825783647849977012476632889835955735432513185323
958463075557409114262417474349347553428646576611667797
396668820291207379143853719588249808126867838374559731
746136085379534524221586593201928090878297308431392844
403281231558611036976801357304216168747609675871348312
025478589320767169132448426236131412508780208000261683
151027341827977704784635868170164365024153691398281264
810213092761244896359928705114964975419909342221566832
572080821333186116811553615836546984046708975602900950
537616475847728421889679646244945160765353408198901385
442487984959953319101723355556602139450399736280750137
837615307127761926849034352625200015888535147331611702
103968175921510907788019393178114194545257223865541461
062892187960223838971476088506276862967146674697562911
234082439208160153780889893964518263243671616762179168
909779911903754031274622289988005195444414282012187361
745992642956581746628302955570299024324153181617210465
832036786906117260158783520751516284225540265170483304
226143974286933061690897968482590125458327168226458066
526769958652682272807075781391858178889652208164348344
825993266043367660176999612831860788386150279465955131
156552036093988180612138558600301435694527224206344631
797460594682573103790084024432438465657245014402821885
252470935190620929023136493273497565513958720559654228
749774011413346962715422845862377387538230483865688976
461927383814900140767310446640259899490222221765904339
901886018566526485061799702356193897017860040811889729
918311021171229845901641921068884387121855646124960798
722908519296819372388642614839657382291123125024186649
353143970137428531926649875337218940694281434118520158
014123344828015051399694290153483077644569099073152433
278288269864602789864321139083506217095002597389863554
277196742822248757586765752344220207573630569498825087
968928162753848863396909959826280956121450994871701244
516461260379029309120889086942028510640182154399457156
805941872748998094254742173582401063677404595741785160
829230135358081840096996372524230560855903700624271243
416909004153690105933983835777939410970027753472000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000

Ein weiteres Beispiel für eine rekursiv definierte Folge: Der Turm von Hanoi



A B C

Auf einer von drei Stangen ist ein Turm von n Scheiben aufgebaut, wobei die Scheiben von unten nach oben kleiner werden. Die Aufgabe besteht darin, diesen Turm von einer Stange auf eine andere zu befördern, wobei die folgenden beiden Spielregeln zu beachten sind:
1. Es darf jeweils nur eine Scheibe von einer Stange zu einer anderen bewegt werden und
2. es darf nie eine grössere Scheibe auf einer kleineren zu liegen kommen. Gesucht ist die minimale Anzahl $H(n)$ von Einzelschritten für einen Turm aus n Scheiben.

Um z.B. einen 3-Turm von Stange A nach Stange C zu bringen, sind folgende $H(3)$ Schritte nötig:

1. bringe den oberen 2-Turm von Stange A zunächst zur Stange B	$H(2)$ Schritte
2. bewege die unterste grösste Scheibe von A nach C	1 Schritt
3. bringe den in B zwischengelagerten 2-Turm nach C	$H(2)$ Schritte.

Also muss für $H(3)$ gelten: $H(3) = 2 \cdot H(2) + +$bzw. allg.

$H(1) = 1 \quad H(n+1) = 2 \cdot H(n) + 1$

Bei $n = 1$ beginnend wird die Rekursionsformel wiederholt angewendet. Dieses Vorgehen heisst Iteration (von iterum lat. für wiederum):
$H(1) = 1 = 2 - 1,\ \ H(2) = 3 = 4 - 1,\ \ H(3) = 7 = 8 - 1,\ \ H(4) = 15 = 16 - 1,$
$H(5) = 31 = 32 - 1, \dots$
Die Beispiele lassen die folgende explizite Formel vermuten:

$H(n) = 2^n - 1$

Der Beweis kann mit vollständiger Induktion erfolgen. Dieses Beweisverfahren wird in einem späteren Abschnitt näher erläutert.

Da die Formel für n = 1 gilt ist noch zu zeigen, dass sich die Gültigkeit der Formel von einer Zahl zur nächsten vererbt.
Nehmen wir für ein beliebiges n die Gültigkeit der Formel $H(n) = 2^n - 1$ an, dann folgt aber nach der Rekursionsformel:
$H(n+1) = 2 \cdot H(n) + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$
Damit ist gezeigt, dass die Formel auch für die nächste Stufe $n + 1$ gilt.

Eine Bemerkung zum Unterschied zwischen **Iteration** und **Rekursion**:
Iteration bedeutet eine Treppe hinaufgehen.
Rekursion bedeutet: zunächst eine Treppe hinuntergehen, etwas holen und dann wieder hinaufgehen.

Eine weitere Anwendung rekursiver Folgen:
Rekursionsformel zur Berechnung der Quadratwurzel

Viele Gleichungen können nicht explizit sondern nur mit Näherungsverfahren gelöst werden. Bei diesen Näherungsverfahren spielen Rekursionsformeln eine wichtige Rolle. Als Beispiel sei erwähnt die Rekursionsformel zur Berechnung der Quadratwurzel aus einer positiven Zahl z:

$$a_1 = \frac{z+1}{2} \text{ und } a_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + \frac{z}{a_n}\right)$$

Beispiel: z = 2
a_1 = **1**.5
a_2 = **1.41**6666..
a_3 = **1.414421**5686...
a_4 = **1.414213562**....

Es kann bewiesen werden, dass sich mit diesem Verfahren (Newtonverfahren) die Anzahl der richtigen Stellen bei jedem Schritt ungefähr verdoppelt.