

4. Das Summenzeichen

Addiert man die n ersten Glieder einer Folge, so entsteht die zu ihr gehörige Reihe (Teilsummenfolge, Partialsummenfolge).

Einführendes Beispiel: $a_n = n^2$ Folge der Quadratzahlen
 zugehörige Reihe $s_1 = 1$ $s_2 = s_1 + a_2 = 5$ $s_3 = 14$ $s_4 = 30$

rekursive Definition:

$$s_1 = a_1 \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

Das Summenzeichen ermöglicht eine abkürzende Schreibweise für Summen. Abkürzend schreiben wir im einführenden Beispiel:

$$s_{10} = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 100 = \sum_{k=1}^{10} k^2$$

Allgemein:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \quad \text{Summe der } n \text{ ersten Glieder der Folge.}$$

Es ist $k = 1, 2, 3, \dots, n$ zu setzen und die zugehörigen Summanden zu addieren.

Bemerkung:

Statt der Indexvariablen k (Summationsindex genannt) verwendet man häufig auch i, j, l, μ oder v .

Beispiele:

a)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \sum_{j=1}^5 \frac{1}{j}$$

b)

$$1^3 = 1^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right)^2$$

Vermutung:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = \frac{1}{4}(n \cdot (n+1))^2 \quad \text{Beweis mit } \rightarrow \text{vollständiger Induktion}$$

c)

$$\sum_{j=1}^{100} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{101}$$

„Elefantenspaziergang im Zolli“: Der Rüssel des ersten und der Schwanz des letzten Elefanten bleiben frei“.

d)

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{100} = \sum_{i=2}^{100} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{100} = \sum_{i=2}^{100} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i}$$

Regeln für das Summenzeichen:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (2) \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

Beispiele:

a)

$$\sum_{i=1}^6 i \cdot (i+1) - \sum_{i=1}^6 i \cdot (i-1) = \sum_{i=1}^6 i^2 + i - (i^2 - i) = 2 \sum_{i=1}^6 i = 2 \cdot \frac{6}{2} \cdot (6+1) = 42$$

b)

$$\sum_{j=0}^4 3 \cdot 2^j = 3 \cdot \sum_{j=0}^4 2^j = 3 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 93$$

c)

Ein Spiel mit Jasskarten:

Eine Mitspielerin wird aufgefordert, unbeobachtet Karten folgendermassen aufzulegen:

Ist z.B. die erste Karte eine 6, dann werden bis 11 weitere Karten auf die Beige gezählt, also 5 Karten dazugelegt. Ist die nächste Karte z.B. eine Dame (Wert 3), dann werden noch 8 Karten beigefügt, ... am Schluss bleiben allenfalls einige Karten übrig.

Die Summe s der untersten Kartenwerte u_i kann dann aus der Anzahl der Kartenbeigen n und der Anzahl der übrig gebliebenen Karten r folgendermassen bestimmt werden:

$$s = \sum_{i=1}^n u_i = 12 \cdot (n-3) + r$$

Beweis:

Werte der untersten Karte:

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ \text{Anzahl der Karten im Stapel:} & 12 - u_1 & 12 - u_2 & 12 - u_3 & \dots & 12 - u_n \end{array}$$

Gesamtzahl der Karten:

$$36 = r + \sum_{i=1}^n (12 - u_i) = r + 12n - \sum_{i=1}^n u_i = r + 12n - s$$

$$s = r + 12n - 36 = 12 \cdot (n-3) + r$$

In den nächsten Abschnitten untersuchen wir zwei wichtige spezielle Folgentypen, die sogenannten arithmetischen (AF) bzw. geometrischen Folgen (GF).