

Über den Aufbau der Mathematik

1. Grundlegende Zahlenmengen:

- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
Die Menge der Primzahlen $\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ ist eine Teilmenge von \mathbf{N}
Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, \dots\}$
Die Menge rationalen Zahlen \mathbf{Q} : Die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl bricht ab oder ist periodisch.
Die Menge der reellen Zahlen \mathbf{R} : Menge der rationalen oder irrationalen Zahlen.
Die Dezimalbruchentwicklung einer irrationalen Zahl ist nicht periodisch und bricht nicht ab.
Beispiele: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \pi, e, \dots$

Folgen und Reihen

1. Eine *Zahlenfolge* ordnet jeder natürlichen Zahl n eindeutig eine reelle Zahl a_n zu. (Folgen sind also Funktionen mit dem Definitionsbereich \mathbf{N}).
2. Eine Folge kann durch Angabe einer Formel für das n -te Glied definiert werden (*explizite Definition*)
3. Bei der rekursiven Definition einer Folge wird das n -te Glied einer Folge durch einen oder mehrere Vorgänger ausgedrückt.
4. Addiert man die Glieder einer Folge, so entsteht eine sogenannte *Reihe* (auch Partialsummenfolge genannt). Für die Darstellung von Reihen verwendet man das Summenzeichen.

Von speziellem Interesse sind die sogenannten

5. Arithmetische Folgen (AF):

Die Folgenglieder wachsen linear: $a_{n+1} = a_n + d$ (Rekursionsformel).

Jedes Glied ist arithmetisches Mittel seiner Nachbarglieder.

Für das n -te Folgenglied gilt: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ (explizite Formel)

für die Summe der n ersten Folgenglieder: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

6. Geometrische Folgen (GF):

Die Folgenglieder wachsen exponentiell: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ (Rekursionsformel).

Für das n -te Folgenglied gilt: $a_n = a_1 q^{n-1}$ (explizite Formel),

Für die Summe der n ersten Folgenglieder: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $q \neq 1$

7. Ist $-1 < q < 1$, dann kommen die Potenzen q^n der Zahl 0 schliesslich beliebig nahe. Man sagt, die Folge q^n konvergiert oder die Folge q^n hat für n gegen unendlich den

Grenzwert 0 und schreibt dafür: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Grenzwerte von Folgen

1. Ist $|q| < 1$ so kommen die Potenzen q^n der Zahl 0 schliesslich beliebig nahe; man sagt, die geometrische Folge q^n hat für n gegen unendlich den Grenzwert 0 und schreibt dafür
$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$
2. Ist $|q| < 1$ so kommt s_n der Zahl $s = a_1/(1 - q)$ schliesslich beliebig nahe; man sagt s ist die *Summe der nichtabbrechenden geometrischen Reihe (unendliche geometrische Reihe)*.

Viele Folgen sind aber weder arithmetisch noch geometrisch

3. Allgemein heisst die reelle Zahl a *Grenzwert der Folge* (a_n) , wenn es zu jeder (noch so kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 gibt, sodass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

$$\text{B. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ (Eulersche Zahl)}$$

Hat die Folge einen Grenzwert, so heisst sie konvergent, andernfalls divergent.

4. Bei nichtabbrechenden Reihen betrachtet man die zugehörige Partialsummenfolge. Hat diese einen Grenzwert s , so sagt man die nichtabbrechende (unendliche) Reihe konvergiere und s heisst Summe der nichtabbrechenden Reihe.
5. Beispiele: - *geometrische Reihen, Taylorreihen* (Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine Potenzreihe).
6. Die *harmonische Reihe* als Beispiel einer divergenten Reihe.

Über den Aufbau der Mathematik

1. In der Mathematik gibt es keine Aussagen von absoluter Wahrheit. Gewisse Aussagen, *Axiome* genannt, werden als wahr angenommen. Aus diesen Axiomen werden andere Aussagen durch logisches Schliessen abgeleitet.
2. Einen mathematischen Satz beweisen heisst, die Wahrheit des Satzes durch logische Schlüsse aus den Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen herleiten.
3. Den Übergang von allgemeinen zu speziellen Aussagen nennt man *Deduktion*. Eine Folgerung durch Deduktion ist immer wahr, sofern die allgemeine Aussage wahr ist.
4. Den Übergang von speziellen zu allgemeinen Aussagen nennt man *Induktion*. Durch Induktion kann man zu falschen oder richtigen Aussagen kommen.
5. Beweistypen:
 - a) der *direkte Beweis*
 - b) der *indirekte Beweis (reductio ad absurdum)*: wir nehmen an, die Negation der Aussage sei richtig und leiten daraus einen Widerspruch her
 - c) Beweis durch *vollständige Induktion*: (Dominosteine)
 1. Induktionsverankerung: Zeige, dass die Aussage für $n = 1$ wahr ist (der erste Dominostein fällt).
 2. Induktionsschluss: Zeige, dass sich die Richtigkeit der Aussage vererbt d.h. wenn die Aussage für eine natürliche Zahl gilt, gilt sie auch für ihren Nachfolger (sobald ein Dominostein fällt, so fällt auch der nächste).
 - d) *Beweis der Kontraposition*: $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
Wenn es regnet, spanne ich meinen Regenschirm auf ist äquivalent zu:
Wenn ich meinen Regenschirm nicht aufspanne, regnet es nicht.