07_**Die Fibonaccifolge**

Die Definition der Fibonaccifolge wurde bereits im einführenden Abschnitt erwähnt. Dort ist auch eine beim ersten Eindruck kompliziert erscheinende explizite Formel zur Bestimmung des n-ten Gliedes erwähnt. Ziel dieses Abschnittes ist es, diese Formel von Binet herzuleiten.

Die Fibonaccifolge kann folgendermassen rekursiv definiert werden:
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$ (0)
Mit den Anfangswerten $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ erhält man die bereits bekannte Folge:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …
Die Erweiterung auf $f_0 = 0$ vereinfacht den Rechenaufwand bei der Herleitung.

Bei der Fibonaccifolge handelt es sich um eine sogenannte Differenzengleichung (lineare Rekursionsgleichung). Ihre Theorie hat Ähnlichkeiten mit der im Kapitel Analysis behandelten Theorie der linearen Differentialgleichungen. Die Idee liegt deshalb nahe, für die Fibonaccifolge einen exponentiellen Ansatz (geometrische Folge) mit geeigneter Basis λ zu wählen.

Ansatz: $a_n = \lambda^n$
Setzt man diesen Ansatz in die Rekursionsgleichung ein, so erhält man
$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$ und damit:
$\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung
$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ (1)
ergeben sich mit der quadratischen Auflösungsformel zu
$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (2)
Nach Vieta gelten die beiden Beziehungen:
$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (3)
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ (4)
und aus (2):
$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$ (5)

Da es sich bei der Fibonaccifolge um eine lineare Differenzengleichung handelt, ist mit den beiden Lösungen auch jede Linearkombination davon eine Lösung.
Damit kann für die Fibonaccifolge folgender Ansatz gewählt werden:
$f_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n$.
Die Konstanten $c_1$und c_2 können mit den beiden Anfangsbedingungen bestimmt werden:
$0 = f_0 = c_1 \cdot \lambda_1^0 + c_2 \cdot \lambda_2^0 = c_1 + c_2$ und daraus $c_2 = -c_1$
$1 = f_1 = c_1 \cdot \lambda_1^1 + c_2 \cdot \lambda_2^1 = c_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) = c_1 \cdot \sqrt{5}$ oder $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Formel von Moivre – Binet (1843) für die Fibonaccifolge

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Zusammenhang mit der Verhältniszahl des goldenen Schnitts

Die quadratische Gleichung (1) hat Ähnlichkeit mit derjenigen, die beim goldenen Schnitt vorkommt. Die Lösungen (2) der quadratischen Gleichung (1) können geometrisch interpretiert werden.

$\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

wird mit bezeichnet $\Phi = \lambda_1$ (6)

Der positive Wert von

$\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$

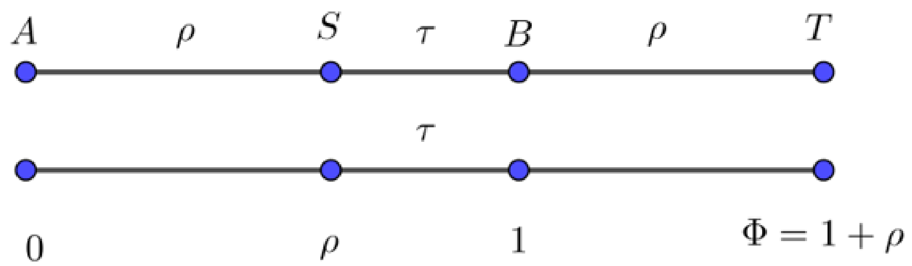
also $-\lambda_2$ wird ρ genannt. $\rho = -\lambda_2$ (7)

ρ ist der grössere Abschnitt (Major M) der im goldenen Schnitt geteilten Strecke der Länge 1.

Für den kleineren Abschnitt τ (auch minor m genannt) gilt damit

$\tau = 1 + \lambda_2 = 1 - \rho \approx 1 - 0.618 \approx 0.382$

$\tau = 1 + \lambda_2 = 1 - \rho$ (8)



Zwischen diesen drei Grössen Φ, ρ und τ besteht der folgende Zusammenhang (Beweis folgt):

$$\Phi = \frac{1+\rho}{1} = \frac{\rho}{\tau} = \frac{M}{m} \qquad (9)$$

$\Phi = \frac{\rho}{\tau}$ ist also das Verhältnis des grösseren zum kleineren Abschnitt der im goldenen Schnitt geteilten Strecke 1 (innerer Teilpunkt).

Bemerkung:

Beim Punkt T handelt es sich <u>nicht</u> um den äusseren Teilungspunkt der harmonisch geteilten Strecke AB ist.

Bei der ersten Gleichheit von (9) wird benutzt, dass $1+\rho = 1-\lambda_2$ wegen (3) gleich $\Phi = \lambda_1$ ist.

Beim weiteren Nachweis von (9) wird die besondere Form der Gleichung (1) verwendet:
Wegen $\lambda^2 = \lambda + 1$ bedeutet das Quadrieren, dass zu einer Lösung von (1) die Zahl 1 addiert werden muss.
Multipliziert man die Gleichung (9) mit τ, dann ist zu zeigen, dass gilt:
$\tau \cdot (1+\rho) = \rho$
Mit (7) und (8) folgt tatsächlich:
$\tau \cdot (1+\rho) = (1+\lambda_2)\cdot(1-\lambda_2) = 1 - \lambda_2^2 = 1 - (\lambda_2 + 1) = -\lambda_2 = \rho$

Die Fibonaccizahl als Kettenbruch

Da Φ eine Lösung der Gleichung (1) $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ ist, gilt auch
$\Phi^2 = \Phi + 1$ oder nach Division durch Φ:
$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$
Ersetzt man in dieser Darstellung schrittweise Φ durch $1 + \frac{1}{\Phi}$, so erhält man die nichtabbrechende Kettenbruchentwicklung von Φ:

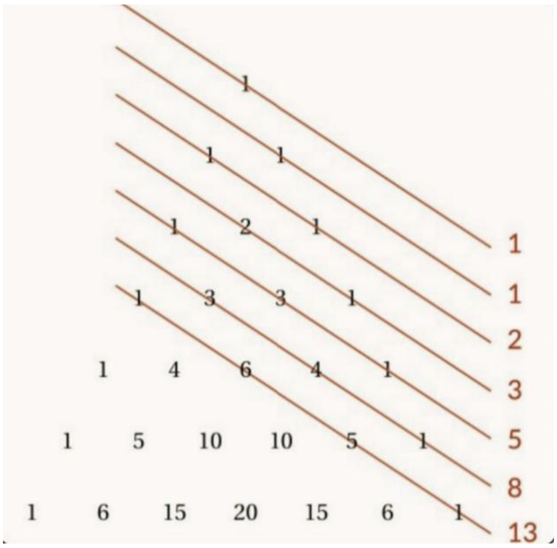
$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}}}$$

Bricht man die Kettenbruchentwicklung ab, so erhält man «besonders gute» Näherungsbrüche für Φ. Weil im Kettenbruch nur die kleinste natürliche Zahl 1 auftritt, nähert sich der Kettenbruch mit der «minimal möglichen Geschwindigkeit» der goldenen Zahl (die nobelste aller noblen Zahlen (Wiki)).
Bildet man den Quotienten aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen, so erhält man eine alternierende Folge mit dem Grenzwert $\Phi \approx 1.618$

f_n	Näherungsbruch	
1		
1	$\frac{1}{1} = 1$	zu klein
2	$\frac{2}{1} = 2$	zu gross
3	$\frac{3}{2} = 1.5$	
5	$\frac{5}{3} \approx 1.67$	
8	$\frac{8}{5} \approx 1.6$	
…		
89		
144	$\frac{144}{89} \approx 1.618$	

Ergänzung: Die Fibonaccifolge und das Pascalsche Dreieck

Gilt die Aussage in der Abbildung allgemein?



Im Pascalschen Dreieck gilt bekanntlich, dass jeder Wert als Binomialkoeffizient geschrieben werden kann, z. B. die Zeile 1 3 3 1 als $\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$.
Vom Pascalschen Dreieck ausgehend ist zu erkennen, dass offenbar die Fälle n gerade bzw. n ungerade zu unterscheiden sind:

n	Summe der Folgenglieder n ungerade	n gerade
1	1	
2		1
3	$2 = \binom{2}{0} + \binom{2}{2}$	
4		$3 = \binom{2}{1} + \binom{3}{3}$
5	$5 = \binom{2}{0} + \binom{3}{2} + \binom{4}{4}$	
6		$8 = \binom{3}{1} + \binom{4}{3} + \binom{5}{5}$
7	$13 = \binom{3}{0} + \binom{4}{2} + \binom{5}{4} + \binom{6}{6}$	
8		$21 = \binom{4}{1} + \binom{5}{3} + \binom{6}{5} + \binom{7}{7}$
9	$34 = \binom{4}{0} + \binom{5}{2} + \binom{6}{4} + \binom{7}{6} + \binom{8}{8}$	
10		$55 = \binom{5}{1} + \binom{6}{3} + \binom{7}{5} + \binom{8}{7} + \binom{9}{9}$

allgemein:

$n = 2m + 1$ $\qquad$ $n = 2m$

$$a_{2m+1} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m+i}{2i} \qquad a_{2m} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+i}{2i+1}$$

1. Fall: $n = 2m + 1$
Ausgehend etwa vom Beispiel $f_9 = 34$ ($m = 4$ also $n = 2{\cdot}4 + 1$) ist zu erkennen, dass die aus 4 + 1 Summanden bestehende Zahl folgende Form hat
$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1\cdot 2} + \binom{m+2}{2\cdot 2} + \binom{m+3}{3\cdot 2} +..+ \binom{m+m}{m\cdot 2}$
vereinfacht

$$a_{2m+1} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m+i}{2i}$$

2. Fall $n = 2m$
Im Beispiel $f_8 = 21$ ($m = 4$ also $n = 2{\cdot}4$) besteht die Summe aus $m = 4$ Summanden:
$\binom{m}{1} + \binom{m+1}{2\cdot 1+1} + \binom{m+2}{2\cdot 2+1} + \cdots + \binom{m+m-1}{2\cdot m+1}$
vereinfacht:

$$a_{2m} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+i}{2i+1}$$

In beiden Fällen spielen die folgenden Eigenschaften eine wichtige Rolle:
- Das Pascalsche Dreieck wird von lauter Einsen umrahmt. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Aus den Binomialkoeffizienten einer Zeile entstehen die Binomialkoeffizienten auf der nächsten Zeile nach dem folgenden Gesetz:
$\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$

{Wählt man eine Dreier-Delegation aus 7 Kandidatinnen, dann ist in $\binom{6}{2}$ Fällen die Leaderin dabei, und in $\binom{6}{3}$ Fällen nicht}.

Allgemein:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad (10)$$

Den folgenden Beweis durch Induktion nach m verdanke ich der Zusammenarbeit mit meinem Kollegen Tobias Reinmann.

Zu zeigen ist, dass

$$a_{2m} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+i}{2i+1}$$

und

$$a_{2m+1} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m+i}{2i}$$

a) Induktionsverankerung: für m = 1:
$a_{2\cdot 1} = a_2 = 1$ nach Definition. Aus der Formel ergibt sich auch $a_2 = \binom{1+0}{2\cdot 0+1} = \binom{1}{1} = 1$.
$a_{2\cdot 1+1} = a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$ mit der Fibonacci-Eigenschaft (0). Aus der Formel ergibt sich ebenfalls $a_3 = \binom{1+0}{2\cdot 0} + \binom{1+1}{2\cdot 1} = 1 + 1 = 2$.

b) Vererbung:
gerader Fall:

$$a_{2\cdot(m+1)} = a_{2\cdot m+2} \overset{(0)}{=} a_{2\cdot m} + a_{2m+1} = \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i}{2i+1} + \sum_{i=0}^{m}\binom{m+i}{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i}{2i+1} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i}{2i} + \binom{2m}{2m}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\left(\binom{m+i}{2i+1} + \binom{m+i}{2i}\right) + 1$$

$$\overset{(10)}{=} \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i+1}{2i+1} + 1$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\binom{m+i+1}{2i+1}$$

Bei der letzten Summe ändert sich die obere Grenze, indem die 1 als $\binom{2m+1}{2m+1}$ in die Summe eingebaut wird.

ungerader Fall:

$$a_{2\cdot(m+1)+1} = a_{2\cdot m+3} \overset{(0)}{=} a_{2\cdot m+2} + a_{2\cdot m+1} = \sum_{i=0}^{m}\binom{m+i+1}{2i+1} + \sum_{i=0}^{m}\binom{m+i}{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i+1}{2i+1} + \binom{2m+1}{2m+1} + \binom{m}{0} + \sum_{i=1}^{m}\binom{m+i}{2i}$$

$$= \binom{m}{0} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i+1}{2i+1} + \sum_{i=1}^{m}\binom{m+i}{2i} + \binom{2m+1}{2m+1}$$

Bei der zweiten Summe wird jetzt der Index zur ersten Summe angepasst.

$$= \binom{m}{0} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i+1}{2i+1} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i+1}{2(i+1)} + \binom{2m+1}{2m+1}$$

$$= \binom{m}{0} + \sum_{i=0}^{m-1}\left(\binom{m+i+1}{2i+1} + \binom{m+i+1}{2i+2}\right) + \binom{2m+1}{2m+1}$$

$$\overset{(10)}{=} \binom{m}{0} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i+2}{2i+2} + \binom{2m+1}{2m+1}$$

$$= \binom{m+1}{0} + \sum_{i=1}^{m}\binom{m+i+1}{2(i-1)+2} + \binom{2m+1}{2m+1}$$

$$= \binom{m+1}{0} + \sum_{i=1}^{m}\binom{m+i+1}{2i} + \binom{2m+2}{2m+2}$$

$$= \sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+i+1}{2i}$$

Bei der letzten Summe werden die Einzelsummanden unten und oben in die Summe eingebaut.