12. Die harmonische Reihe

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Um die Frage zu klären, ob die harmonische Reihe konvergent ist, schätzen wir spezielle Teilsummen ab.

Bemerkung:
Die Reihe heisst harmonisch, weil jedes ihrer Glieder das harmonische Mittel der beiden Nachbarglieder ist:

$$\frac{2\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}$$

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$a_4 = 1 + + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{3}{2} + \frac{2}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$

$a_8 > s_4 + 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$$a_{16} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$a_{16} = a_{2^4} = \frac{2436559}{720720} \approx 3.38072 > 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$a_{32} = a_{2^5} = \frac{586061125622639}{144403552893600} \approx 4.05849 > 1 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3.5$$

$$a_{64} = a_{2^6} = \frac{6231716796942156909716933339}{1313629871225358075012624000} \approx 4.74389 > 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$a_{128} = a_{2^7} > 4.5$$

$$a_{256} = a_{2^8} > 5$$

$$a_{1125899906842624} = a_{2^{50}} > 26$$

$$a_{1267650600228229401496703205376} = a_{2^{100}} > 51$$

$$a_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

Die Teilsummen werden also schliesslich grösser als jede noch so grosse Zahl. Die harmonische Reihe ist damit als divergent erkannt.

Die folgende Tabelle zeigt das langsame Wachstum der Summen.

n	a_n
10	2.93
100	5.187
1'000	7.485
10'000	9.7876..
100'000	12.09...
1'000'000	14.39...

Um den Wert 100 zu übertreffen sind ca. $4.788 \cdot 10^{43}$ Glieder nötig.

Es gilt der folgende Satz von Euler (siehe Formelsammlung)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=0.5772156649\ldots \text{ (Eulersche Konstante)}$$

Illustration am Beispiel a_{16}:

$a_{16} = a_{2^4} = \frac{2436559}{720720} \approx 3.38072 > 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$

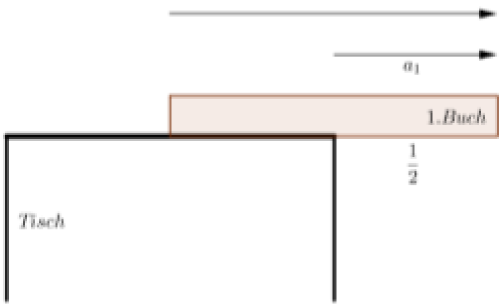
$a_{16} - ln\, 16 = 3.38072 - \ln 16 \approx 0.608131..$

Vergleiche auch Urs Stammbach: Die harmonische Reihe: Historisches und Mathematisches in Elem. Math. 54 (1999) 93 – 106

Wie weit lässt sich ein Bücherstapel (theoretisch) mit Büchern der Länge 1 über einen Tisch schieben?

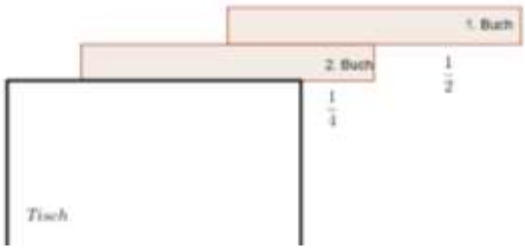
1 Buch: Überhang: $\frac{1}{2}$

Der Überhang a_1 des 1. Buchs über dem Tisch ist $\frac{1}{2}$.



2 Bücher: Überhang: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Das zweite Buch wird so weit nach links unter das erste geschoben, dass der Schwerpunkt des ersten genau über die rechte Oberkante des zweiten zu liegen kommt.



Allgemein gilt:
Die x-Koordinate des Schwerpunkts eines Körpers, der sich aus zwei Teilen mit den Massen m_1 und m_2 mit den Schwerpunktskoordinaten x_1 und x_2 zusammensetzt, ist das gewichtete Mittel

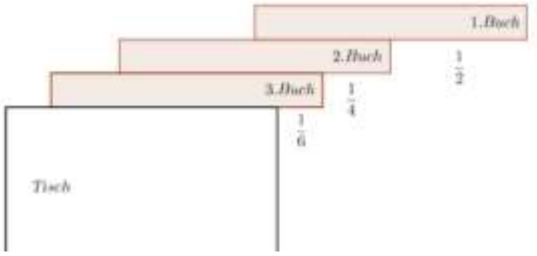
$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunkts der ersten beiden Bücher vom linken Rand ergibt sich zu:

$x_S = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 1}{1+1} = \frac{3}{4}$ und daraus der Überhang $a_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

3 Bücher: Überhang: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

Unter den Stapel aus zwei Büchern wird nun ein drittes Buch so geschoben, dass der gemeinsame Schwerpunkt der ersten beiden genau über der rechten Oberkante des dritten zu liegen kommt. Für die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunkts der ersten drei Bücher vom linken Rand des dritten Buchs gilt dann:



$x_S = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{2}}{2+1} = \frac{5}{6}$ und daraus der Überhang $a_2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

Wird analog das Verfahren fortgesetzt, so gilt allgemein für die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunkts der ersten k Bücher vom rechten Rand des k. Buches

$x_S = \frac{(k-1)\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{2}}{k-1+1} = \frac{2k-1}{2k}$ und daraus der Überhang zu $a_k = \frac{1}{2k}$

Der Gesamtüberhang s_n bei n Büchern ist gleich der Summe der einzelnen a_k

$$s_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe kann also (theoretisch) das letzte Buch gegenüber dem ersten beliebig weit seitlich verschoben werden, ohne dass der Stapel kippt.

Café Mathe – ein Stück Mathematik zu einer Tasse Kaffee zu geniessen

ZT 28 4 09

Bauen am Abgrund

ARMIN P. BARTH

Als Galileo Galilei mit seinen Fernrohren die benachbarten Planeten untersuchte, erkannte er, dass eine seit langer Zeit tradierte Aussage falsch war: Die Sonne kreist nicht um die Erde; es ist umgekehrt. Es zeichnet wissenschaftliches Arbeiten aus, dass man Hypothesen darüber aufstellt, wie ein bestimmter Ausschnitt der Welt funktioniert, dass man dann diesen Ausschnitt so lange untersucht und die Hypothesen kritisch überprüft, bis entweder Argumente vorliegen, welche die Hypothesen stützen, oder aber bis klar ist, dass diese nicht länger haltbar sind.

In eine ähnliche Situation könnten Sie beim folgenden Problem geraten. Es ist sehr wohl möglich, dass Sie schnell zu einer Überzeugung gelangen, die Sie dann aber wieder aufgeben müssen. Stellen Sie sich vor, Sie hätten viele Bücher, alle genau gleich. Sie stapeln diese Bücher auf einen Tisch, sodass eine Seite des Stapels genau über der Tischkante liegt wie in der Abbildung. Nun rücken Sie die Bücher einzeln etwas über die Tischkante hinaus, das unterste nur wenig, das zweitunterste etwas mehr und so weiter, ohne dass der Stapel aber kippt. Die Frage ist nun: Wie weit kann das oberste Buch maximal über die Tischkante hinausragen, ohne dass der Turm kippt? Eine Buchlänge? Weniger? Mehr?

Bei nur einem Buch ist die Situation einfach. Maximal die Hälfte kann über die Tischkante hinausragen. (Genau genommen darf der Überhang nur etwa einen Millimeter weniger als die halbe Buchlänge sein.) Bei zwei Büchern ist die Sache schon interessanter. Es ist klar, dass wir dafür sorgen müssen, dass der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Bücher genau über der Tischkante (oder ganz wenig dahinter) liegt. Wie kann das erreicht werden? Nun, wenn das untere Buch einen Überhang von einem Viertel der Buchlänge und das obere Buch von drei Vierteln der Buchlänge hat wie in der Abbildung rechts, so ist diese Bedingung offenbar erfüllt; es ist ja dann gleich viel Masse über dem Tisch wie über dem Abgrund. Diese Situation ist das Beste, was wir bei zwei Büchern schaffen können, und folglich beträgt der maximale Überhang bei zwei Büchern drei Viertel der Buchlänge. Doch wie geht es weiter?

Bei einem Buch beträgt der maximale Überhang eine halbe Buchlänge. Bezeichnen wir mit L die Buchlänge, so ist das L/2. Bei zwei Büchern fanden wir drei Viertel der Buchlänge; das ist das Anderthalbfache der halben Buchlänge, also (L/2)·(1+½). Wenn man den Stapel aus drei Büchern untersucht, findet man, dass man ein wenig weiter hinausbauen kann, nämlich (L/2)·(1+½+⅓). Bei vier Büchern gelangt man noch etwas weiter hinaus, nämlich (L/2)·(1+½+⅓+¼), und so weiter. Welchen maximalen Überhang erhält man bei noch mehr Büchern? Offenbar hängt alles davon ab, wie sich die Summe (L/2)·(1+½+⅓+¼+⅕+…) benimmt, wenn man ihr weitere Glieder anfügt. Falls Ihr erster Gedanke der ist, dass der Wert dieser Summe die Zahl 2 nie übertreffen kann, so muss ich Sie enttäuschen; schon die ersten vier Zahlen ergeben addiert mehr als 2. Mit vier Büchern kann man also einen Überhang von mehr als einer Buchlänge erreichen. Gibt es eine andere Zahl, die unsere Summe nie übertreffen kann? 3 vielleicht oder 4? Nein, auch diese Vermutung wäre falsch: Die Summe der ersten elf Zahlen übertrifft nämlich die Zahl 3, und die Summe der ersten einunddreissig Zahlen übertrifft die Zahl 4. Folglich kann man mit einunddreissig Büchern bereits einen Überhang von zwei Buchlängen erreichen, eine wahrhaft schwindlige Angelegenheit.

Viele Leute glauben, dass es auf jeden Fall eine Obergrenze für den Überhang geben muss. Beim tausendsten Buch wächst der Überhang ja nur noch um den tausendsten Teil der halben Buchlänge, und das ist so wenig, dass es kaum mehr eine Rolle spielt; also stagniert der Überhang bestimmt irgendwann. Doch der Wert unserer Summe wird tatsächlich beliebig gross. Bei 1674 Büchern zum Beispiel wird der Wert die Zahl 8 übersteigen, sodass der Überhang dann also schon vier Buchlängen beträgt. Wie kann man verstehen, dass unsere Summe keine Obergrenze hat? Dazu schnüren wir Pakete: Das erste Paket enthält die Zahlen ⅓ und ¼. Da jede dieser Zahlen grösser als ¼ ist, ist der Wert des ersten Paketes also grösser als 2·¼ = 0.5. Das zweite Paket enthält die nächsten vier Zahlen, also ⅕+⅙+1/7+⅛. Da jede dieser Zahlen grösser als ⅛ ist, ist der Wert des zweiten Paketes grösser, also 4·⅛=½. Das dritte Paket enthält die nächsten acht Zahlen, also 1/9+1/10+…+1/16. Da jede dieser Zahlen grösser als 1/16 ist, ist der Wert des dritten Paketes also grösser als 8·1/16=0.5, und so weiter. Da unsere Summe nie aufhört, enthält sie unendlich viele Pakete, und jedes Paket hat einen Wert, der über 0.5 liegt. Daher kann die Summe keine Obergrenze haben.

Tatsächlich kommt man durch diese Bauweise unendlich weit über den Abgrund hinaus. Vielleicht wird diese Idee eines Tages einen Architekten eines Hochhauses beflügeln.

ARMIN P. BARTH, Wetzikon, ist Gymnasiallehrer an der Kantonsschule Baden und Autor. armin.barth@bluewin.ch

Skizze: ac

Variante der Einkleidung: Gummiband (vgl. TI Nachrichten www.armin-p-barth.ch)

Ein punktförmig gedachter Käfer startet am linken Ende eines anfänglich 100 cm langen Gummibands mit einer Geschwindigkeit von 1 cm/s. Dieses Gummiband wird nach jeder Sekunde (ohne Zeitverlust) um einen weiteren Meter nach rechts gestreckt. Wann kann allenfalls der Käfer das rechte Ende des sich ständig dehnenden Gummibands erreichen (Martin Gardner: The Rubber Rope 2005)?

Zeit in s	Distanz in cm: vom linken	vom rechten Ende des Gummibands
1	1	$100 - 1 = 99$
2	$2{\cdot}1 + 1 = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$100{\cdot}2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 197$
3	$\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1$	
	$= 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$	$100 \cdot 3 - 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$
…..		
t		$t \cdot \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{i} \qquad t \cdot \left(100 - \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{i}\right)$

Für die harmonische Reihe gilt die Abschätzung:

$\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{i} = \ln t + \gamma$ γ heisst Eulersche Konstante und hat den Wert $\gamma \approx 0.5772\ldots$

Wegen $t \cdot \left(100 - \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{i}\right) \approx 100 - \ln t - \gamma$ erreicht der Käfer tatsächlich das rechte Gummiband wenn $100 - \ln t - \gamma = 0$, d.h. nach ungefähr $t = e^{100-\gamma} \approx 1.5 \cdot 10^{35}$ Jahren.