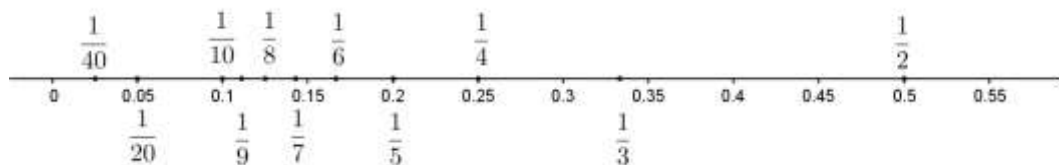


10. Konvergenz von Folgen und Reihen

Der in den Abschnitten geometrische Folgen und Reihen eingeführte Grenzwertbegriff ist für die Analysis (Infinitesimalrechnung) grundlegend. Im Folgenden werden Grenzwerte bei beliebigen Folgen und Funktionen untersucht.

Beispiele:

a) $a_n = \frac{1}{n}$



Fast alle Glieder der Folge liegen in einer Umgebung von 0, wobei „Fast alle“ bedeuten soll „alle bis auf endlich viele“.

Wir sagen in diesem Fall, die Folge hat den Grenzwert 0 und schreiben dafür $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Folgen mit dem Grenzwert 0 heißen Nullfolgen.

b): $a_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$

In jeder noch so kleinen Umgebung von 2 liegen fast alle Folgenglieder. Die Folge hat den Grenzwert 2 und wir schreiben dafür: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

Hat eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent.

c)

Beispiel einer divergenten Folge: $a_n = n^2$

Definition 1:

Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (a_n) , wenn in einer beliebig gewählten Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen und wir schreiben dafür: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Um zu zeigen, dass eine Folge konvergiert, ist also für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ zu zeigen,

dass fast alle Folgenglieder in der ε -Umgebung von a liegen.



Wählt man etwa im

Beispiel a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, dann liegen alle Folgenglieder a_n mit Nummer $n > 10$ in der ε -Umgebung von 0.

In Beispiel b) ist zu zeigen, dass $\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{3}{n+1} \right| < \varepsilon$ für ein geeignetes n_0 ist.

$\frac{3}{n+1} < \varepsilon$ ist erfüllt für $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$. Wählt man z.B. $\varepsilon = \frac{1}{10}$, dann ergibt sich $n_0 = 29$.

Definition 2 (Formulierungsvariante)

Eine Zahlenfolge heißt konvergent mit dem Grenzwert a , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ sobald $n > n_0$.

Bemerkung:

Mit andern Worten a_n liegt in der ε -Umgebung von a für $n > n_0$.

Grenzwert von Folgen

	$a_n = \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 2}$	$a_n = \frac{1}{n}$	$a_n = \frac{1}{100\sqrt{n}}$	$a_n = \frac{1}{n^2}$	$a_n = \frac{\sin(n)}{n}$	$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	
n =	1	0.33333333	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.84147098	2.00000000
	2	0.61111111	0.50000000	0.99309250	0.25000000	0.45464871	2.25000000
	3	0.68421053	0.33333333	0.98907400	0.11111111	0.04704000	2.37037037
	4	0.71212121	0.25000000	0.98623270	0.06250000	-0.18920062	2.44140625
	5	0.72549020	0.20000000	0.98403444	0.04000000	-0.19178485	2.48832000
	6	0.73287671	0.16666667	0.98224197	0.02777778	-0.04656925	2.52162637
	7	0.73737374	0.14285714	0.98072900	0.02040816	0.09385523	2.54649970
	8	0.74031008	0.12500000	0.97942030	0.01562500	0.12366978	2.56578451
	9	0.74233129	0.11111111	0.97826739	0.01234568	0.04579094	2.58117479
	10	0.74378109	0.10000000	0.97723722	0.01000000	-0.05440211	2.59374246
	11	0.74485597	0.09090909	0.97630626	0.00826446	-0.09090820	2.60419901
	12	0.74567474	0.08333333	0.97545713	0.00694444	-0.04471441	2.61303529
	13	0.74631268	0.07692308	0.97467666	0.00591716	0.03232054	2.62060089
	14	0.74681934	0.07142857	0.97395461	0.00510204	0.07075767	2.62715156
	15	0.74722838	0.06666667	0.97328289	0.00444444	0.04335252	2.63287872
	16	0.74756335	0.06250000	0.97265495	0.00390625	-0.01799396	2.63792850
	17	0.74784111	0.05882353	0.97206546	0.00346021	-0.05655279	2.64241438
	18	0.74807396	0.05555556	0.97151000	0.00308642	-0.04172151	2.64642582
	19	0.74827109	0.05263158	0.97098487	0.00277008	0.00788827	2.65003433
	20	0.74843945	0.05000000	0.97048695	0.00250000	0.04564726	2.65329771
	100	0.74993750	0.01000000	0.95499259	0.00010000	-0.00506366	2.70481383
	101	0.74993873	0.00990099	0.95489757	0.00009803	0.00447550	2.70494598
	102	0.74993993	0.00980392	0.95480349	0.00009612	0.00975320	2.70507556
	103	0.74994109	0.00970874	0.95471034	0.00009426	0.00604843	2.70520264
	104	0.74994222	0.00961538	0.95461810	0.00009246	-0.00309252	2.70532731
	1000	0.74999938	0.00100000	0.93325430	0.00000100	0.00082688	2.71692393
	1001	0.74999938	0.00099900	0.93324497	0.00000100	0.00091907	2.71692529
	1002	0.74999938	0.00099800	0.93323565	0.00000100	0.00016693	2.71692664
	1003	0.74999938	0.00099701	0.93322635	0.00000099	-0.00073703	2.71692799
	1004	0.74999938	0.00099602	0.93321705	0.00000099	-0.00096225	2.71692934
	10000	0.74999999	0.00010000	0.91201084	0.00000001	-0.00003056	2.71814593
	10001	0.74999999	0.00009999	0.91200993	0.00000001	-0.00009662	2.71814594
	10002	0.74999999	0.00009998	0.91200902	0.00000001	-0.00007385	2.71814595
	10003	0.74999999	0.00009997	0.91200810	0.00000001	0.00001681	2.71814597
	10004	0.74999999	0.00009996	0.91200719	0.00000001	0.00009200	2.71814598
	100000	0.75000000	0.00001000	0.89125094	0.00000000	0.00000036	2.71826824
	100001	0.75000000	0.00001000	0.89125085	0.00000000	-0.00000822	2.71826824
	100002	0.75000000	0.00001000	0.89125076	0.00000000	-0.00000924	2.71826824
	100003	0.75000000	0.00001000	0.89125067	0.00000000	-0.00000176	2.71826824
	100004	0.75000000	0.00001000	0.89125058	0.00000000	0.00000733	2.71826824
	1000000	0.75000000	0.00000100	0.87096359	0.00000000	-0.00000035	2.71828047
	1000001	0.75000000	0.00000100	0.87096358	0.00000000	0.00000060	2.71828047
	1000002	0.75000000	0.00000100	0.87096357	0.00000000	0.00000100	2.71828047
	1000003	0.75000000	0.00000100	0.87096356	0.00000000	0.00000048	2.71828047
	1000004	0.75000000	0.00000100	0.87096356	0.00000000	-0.00000048	2.71828047
limes	0.75	0	0	0	0	e	

ac

Zahlenfolgen

Will man Analysis betreiben
muss man gelegentlich was schreiben;
wir schreiben daher zu Beginn
Uns ein paar schlichte Zahlen hin:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \quad (1)$$

Wie rechts es immer weiter geht,
sich sicherlich von selbst versteht:
Ein Sechstel steht an sechster Stell.
An siebter dann ein Siebentel,
und was nun niemand mehr verwundert:
ein Hundertstel steht auf Platz hundert.
Kurzum an n-ter Position,
das wissen wir jetzt alle schon,
muss stets die Zahl ein n-tel steh'n,

$$\frac{1}{n}$$

Wie schön, wie schön, wie schön!

Das was soeben hier beschrieben,
wo ihr gefolgt seid mir, ihr Lieben,
wird eine Folge kurz genannt
von Bayern bis zur Waterkant.

Auch bei den nächsten Folgen hier
reicht wieder rechts nicht das Papier:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad (2)$$

$$2, 4, 6, 8, \dots \quad (3)$$

$$-1, 1, -1, 1, -1, \dots \quad (4)$$

$$1, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{5}, 1, \frac{6}{7}, 1, \dots \quad (5)$$

(Man füg' an jeder wenn man kann,
zum Spass sechs weit're Zahlen an!)

Ganz allgemein schreibt Folgen man
in folgender Gestalt gern an:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

wie auch auf etwas kürz're Art

$$(a_n),$$

wobei man gleich Papier einspart.

Die Folgen (1) bis (4) erhalten
auf diese Weise die Gestalten

$$\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{2^n}\right), (2n), ((-1)^n)$$

dieweil die fünfte Folge man
z.B. so beschreiben kann

$$a_n = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{n+1} & , \text{ falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Wie ich mir eine Folge mal'
ist letzten Endes ganz egal,
sofern man nur dabei begreift,
wie diese läuft und läuft und läuft,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

d.h. wie jedem n dabei
ein a_n zugeordnet sei.

Das n durchläuft vergnügt und heiter
dabei die ganze Zahlenleiter

1, 2, 3, 4, 5, ... usw.

Nun sind wir schon ein Stück gescheiter.

Die Zahlenfolgen laufen, laufen

fast wie beim Sommerschlussverkaufen.

Was hat das nur für einen Sinn?

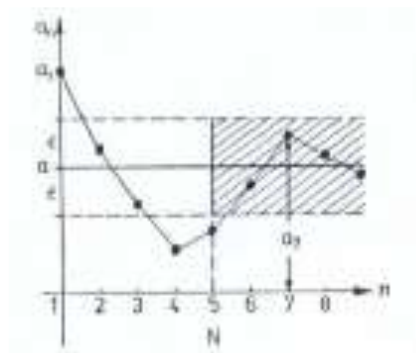
Wo laufen denn die Folgen hin?

Gar manche machen wilde Sprünge
und and're ausgeflippte Dinge.

Doch einige, in stiller Ruh

sie "streben einem Grenzwert zu".

Sie konvergieren sagt man auch
(das ist schon lange Zeit so Brauch).
Was aber heisst „sie konvergieren“?
Das will ich kurz euch definieren:



Man sagt, es konvergiert (a_n)
zum Grenzwert, welchen a ich nenn',
wenn, wie skizziert im ob'gen Bild,
die folgende Bedingung gilt:

„Zu jeder positiven Zahl
- ich nenn sie ε einmal -
gibt es ein positives N ,
für das ich folgendes erkenn':
 $\forall n > N: |a_n - a| < \varepsilon$ “

In Formelzeichen, wie durchtrieben,
wird dies erstaunlich kurz beschrieben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Auch wird dies so symbolisiert:

$$a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

wie auch in Kurzform aufnotiert:

$$a_n \rightarrow a.$$

So einfach alles dies gesagt;
So schwer sich damit mancher plagt.
Drum lieber Leser, sei recht pfiffig,
und mach' dir's an Exempeln griffig.

Zum Beispiel Folgen (1) und (2),
sie streben munter, eins, zwei, drei,
zum Grenzwert 0, das sieht man schon.
Prüf's nach mit N und ε .

Bei (3), (4) ist man angeschmiert,
weil überhaupt nichts konvergiert.
Guckt man sich auch die Augen aus,
kein Grenzwert springt dabei heraus.
Man möchte fast den Mut verlieren,
denn diese Folgen „divergieren“.

Die Folge (5) dagegen strebt,
was uns're Stimmung merklich hebt
zum Grenzwert 1, ihr sei's gedankt,
obwohl sie dabei etwas schwankt.

Der Leser such'sich weit're Fälle
jongliere sie wir Zirkusbälle,
hol N und ε herbei,
vermische dies zu einem Brei,
der klumpenfrei ist, schlank und glatt,
bis alles er verstanden hat.

Der junge Math'ematik-Student,
der dies begriffen hat und kennt,
der hat ein sich'eres Fundament,
Wenn frohgemut er weiter rennt.

Grenzwertsätze

Mit zwei konvergenten Folgen (a_n) und (b_n) sind auch die Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfolgen konvergent und es gelten die in Formeln und Tafeln (FuT) aufgeführten Grenzwertsätze, illustriert an den folgenden Beispielen:

Beispiele:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{2}$$

Zähler und Nenner werden durch die höchste Potenz von n dividiert.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{n}}{(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}} + 1\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{n+3}{n}} + 1} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Übungsaufgabe:

In den folgenden Fällen ist das Konvergenzverhalten der angegebenen Folgen zu untersuchen:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = \frac{4n^2+5}{7n^2+3}, & \text{b) } a_n = \frac{1}{n} \cdot \left(n^2 + \frac{1}{n}\right) & \text{c) } 1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6} \\ \text{d) } a_n = \frac{3n+4(-1)^n}{n}, & \text{e) } a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \end{array}$$

Lösung:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{7}$, die Folge ist konvergent
 b) $a_n = n + 1$, die Folge ist (bestimmt) divergent
 c) divergent, die Folgenglieder kommen -1 und 1 beliebig nahe. 1 und -1 sind sogenannte Häufungspunkte der Folge.
 d) $a_n = 2 + \frac{4(-1)^n}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, die Folge ist konvergent
 e) die Folge ist periodisch mit den Folgengliedern 1, 0, -1, 0, ... die Folge ist divergent.

Die Eulersche Zahl e

Satz:

Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist konvergent.



http://www.spektrum.de/sixcms/media.php/924/april_2007_euler.pdf

Intervallschachtelung für e

n	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000	100000	1000000
$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.37	2.44	2.49	2.59	2.70	2.717	2.7181	2.71827	2.718280
$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$	4	3.38	3.16	3.05	2.99	2.85	2.73	2.720	2.7184	2.71830	2.718283

Beweis:

Der Satz wird bewiesen, indem man nachweist, dass die Folgen $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ eine sogenannte Intervallschachtelung bilden. Dazu ist zu zeigen:

1. die Folge a_n ist monoton wachsend
2. die Folge b_n ist monoton fallend
3. $a_n \leq b_n$ für alle n
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

Gemäss der Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen ist durch diese Intervallschachtelung eine eindeutig bestimmte Zahl e festgelegt; e heisst Eulersche Zahl.

$e \approx 2.718281828459045\dots$

Beweis von 1:

Dazu wird der folgende Quotient abgeschätzt:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \stackrel{(1)}{>} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

woraus die Behauptung folgt, denn es gilt nach der sogenannten Bernoullischen Ungleichung (\rightarrow Vollständige Induktion) nämlich:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \quad (1)$$

Beweis von 2:

Analog zu 1. erhält man

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \stackrel{(1)}{>} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1$$

Der Beweis von 3. folgt unmittelbar aus

$$\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$$

Beweis von 4:

Wegen

$$b_n - a_n = b_n - b_n \cdot \frac{n}{n+1} = b_n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = b_n \cdot \frac{1}{n+1} < b_1 \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{4}{n+1} \text{ gilt:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+1} = 0$$

Ein zweiter Beweis ergibt sich aus dem folgenden wichtigen

Satz:

Eine monotone und beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.

Es kann nämlich gezeigt werden, dass die Folge a_n monoton wachsend und beschränkt ist. (siehe die folgende Beilage aus dem Skript der Vorlesung von H. Huber ETHZ oder in der Literatur).

S A T Z . Die Zahlfolge

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

ist monoton wachsend und beschränkt.

B E W E I S .

1. Behauptung : Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

Beweis : Wir stützen uns auf den binomischen Lehrsatz

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) n} \cdot b^n$$

$= 1$

Spezialfälle : $(a + b)^2 = a^2 + \frac{2}{1} a b + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} b^2,$

$$(a + b)^3 = a^3 + \frac{3}{1} a^2 b + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} a b^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3.$$

Es gilt also :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \\ &+ \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)}{1 \cdot 2 \cdots n} + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)}. \end{aligned}$$

Entsprechende Glieder sind beim ersten Ausdruck kleiner als beim zweiten. Ausserdem enthält der zweite Ausdruck einen (positiven) Term mehr. Daraus folgt die Behauptung.

2. Behauptung : Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Beweis :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdots n} \leq$$

$$1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \quad \text{QED}$$

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt, dass die betrachtete Zahlfolge konvergiert, und zwar, da alle Glieder zwischen 2 und 3 liegen, gegen eine Zahl aus dem Intervall $[2, 3]$.