

### 13. Aufbau der Mathematik

In der Mathematik gibt es keine Aussagen von absoluter Wahrheit. Gewisse Aussagen, Axiome genannt werden als wahr angenommen und daraus durch logisches Schliessen weitere Aussagen abgeleitet.

Eine mathematische Disziplin z.B. die Zahlentheorie besteht aus einer Menge von Sätzen die logisch abgeschlossen ist. Jede logische Folgerung aus Sätzen soll ebenfalls zur Menge gehören.

Die Axiomatik hat die Aufgabe aus dieser Menge eine Teilmenge so zu suchen, dass alle anderen Sätze daraus logisch gefolgert werden können (vgl. das Axiomensystem von Peano für die Menge der natürlichen Zahlen ( $\rightarrow$  Vollständige Induktion)). Das Axiomensystem sollte vollständig und widerspruchsfrei sein.

Bemerkung:

Aus wahren Voraussetzungen folgen wahre Schlüsse, hingegen können aus falschen Voraussetzungen wahre oder falsche Aussagen folgen, wie das Beispiel zeigt:

Jedes Quadrat ist ein Kreis (f)

Jeder Kreis ist ein Rechteck (f)

Schluss:

Jedes Quadrat ist ein Rechteck (w)

„Einen Satz beweisen“ heisst die Wahrheit des Satzes durch logische Schlüsse aus den Axiomen oder aus schon bewiesenen Sätzen herleiten. Dies kann auf verschiedene Arten geschehen:

#### Beweistypen:

- a) der direkte Beweis
- b) der indirekte Beweis
- c) Beweis durch Kontradiktion
- d) Beweis durch vollständige Induktion

a)

**Der direkte Beweis (Abtrennungsregel, modus ponens)**

Ist die Aussage „Wenn A, so B“ wahr und ist auch die Aussage A wahr, dann darf man auf die Wahrheit von B schliessen.

Voraussetzungen:

A

$A \Rightarrow B$

Schluss: B

Beispiel 1):

Ein Satz aus der Zahlentheorie::

Für jede ungerade natürliche Zahl  $u$  ist  $u^3 - u$  durch 24 teilbar.

$u$	$u^3 - u$
1	0
3	24
5	120
7	

...

Beweis:

Der Satz ist trivialerweise richtig für  $u = 1$ .

Ist  $u > 1$  dann ist  $u^3 - u = u \cdot (u^2 - 1) = (u - 1) \cdot u \cdot (u + 1)$  das Produkt von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen.

Von drei aufeinanderfolgenden ist eine durch 3 teilbar.

Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine sogar durch 4 teilbar.

$u^3 - u$  ist also durch (mindestens) drei Faktoren 2 und (mindestens) einen Faktor 3 teilbar, woraus die Behauptung folgt.

Beispiel 2):

Satz:

Voraussetzung:

Gegeben sind die Brüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  wobei gilt:  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$   $a, b, c, d \in \mathbf{N}$  mit  $b \neq 0$  und  $d \neq 0$

Behauptung:  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Beweis der ersten Ungleichung:

Bei den Umformungen werden die Monotoniegesetze für Ungleichungen angewendet.

Nach Voraussetzung gilt:  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

erweitert:  $\frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd}$

gekürzt:  $ad < bc$

Auf beiden Seiten  $ab$  addiert:  $ad + ab < bc + ab$

ausklammern  $a \cdot (b + d) < b \cdot (a + c)$

Beide Seiten durch  $b \cdot (b + d)$  dividieren:  $\frac{a \cdot (b + d)}{b \cdot (b + d)} < \frac{b \cdot (a + c)}{b \cdot (b + d)}$  und daraus  $\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d}$

Der Beweis für die zweite Ungleichung ergibt sich analog.

Ein nichtmathematischer „Beweis“ ergibt sich, wenn man die beiden Brüche als Mischungsverhältnisse von Apfelsaft und Wasser interpretiert.

Beispiel für einen Scheinbeweis:

$$\begin{aligned}
 1 - 3 &= 4 - 6 \\
 1 - 3 + \frac{9}{4} &= 4 - 6 + \frac{9}{4} && \text{quadratische Ergänzung} \\
 \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \\
 1 - \frac{3}{2} &= 2 - \frac{3}{2} && \text{der falsche Schluss} \\
 1 &= 2
 \end{aligned}$$

Aus der Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen kann nicht auf die Gleichheit der Zahlen geschlossen werden.

**b)**

### **Der indirekte Beweis**

Man nimmt an, dass die Aussage A falsch sei und leitet daraus einen Widerspruch zu einer Voraussetzung oder einem anderen wahren Satz her.

Beispiel 1)

Satz:

$\sqrt{2}$  ist eine irrationale Zahl ( $\rightarrow$  Funktionen)

Beispiel 2)

Satz:

$\log_{10} 2$  ist keine rationale Zahl

Beweis indirekt:

Annahme:  $\log_{10} 2$  kann als gekürzter Bruch dargestellt werden:

$$\log_{10} 2 = \frac{p}{q} \quad \text{mit } p, q \in \mathbf{N}, q \neq 0 \text{ oder nach Definition des Logarithmus:}$$

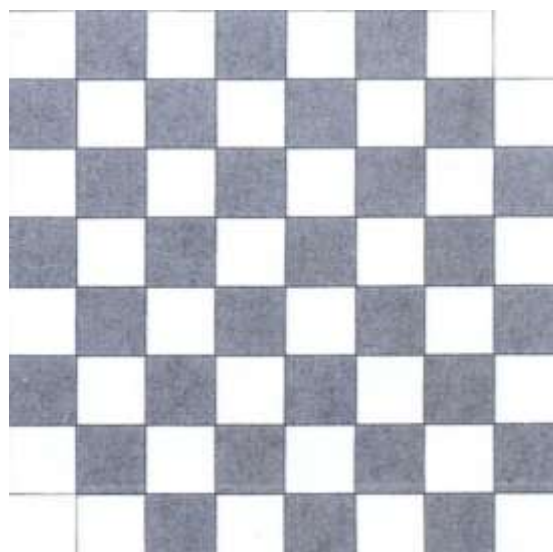
$$10^{\frac{p}{q}} = 2 \text{ oder mit } q \text{ potenziert } 10^p = 2^q \text{ oder nach den Potenzgesetzen: } (2 \cdot 5)^p = 2^p \cdot 5^p = 2^q$$

Die auf den beiden Seiten der Gleichung vorkommenden natürlichen Zahlen können wegen der eindeutigen Primzerlegung nur für  $p = q = 0$  übereinstimmen, im Widerspruch zur Annahme  $q \neq 0$ .

### Beispiel 3) Ein Schachbrett mit zwei ausgeschnittenen Eckfeldern

Eine Frage:

Das abgebildete geänderte Schachbrett wird mit Dominosteinen überdeckt, die genau zwei benachbarte Felder belegen. Ist es möglich, das Schachbrett lückenlos mit Dominosteinen so zu überdecken, dass sich keine zwei Dominosteine überlappen?



Antwort: nein!

Begründung indirekt:

Annahme, dass Brett kann lückenlos überdeckt werden.

Nach Voraussetzung belegt ein Dominostein genau zwei Felder, nämlich ein weisses und ein schwarzes. Daraus folgt, dass bei einer lückenlosen Überdeckung die Anzahl der weissen und schwarzen Felder übereinstimmen muss, im Widerspruch dazu, dass das Brett zwar 32 weisse Felder aber nur 30 schwarze Felder enthält.

c)

**Beweis der Kontraposition:**  $A \Rightarrow B$  ist äquivalent zu  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

Die Aussage:

Wenn es regnet, spanne ich meinen Regenschirm auf  
ist äquivalent zu:

Wenn ich meinen Regenschirm nicht aufspanne, regnet es nicht.

d)

**Beweis durch Vollständige Induktion**

Dieser Beweistyp wird im nächsten Abschnitt besprochen.