

## Beispiele für Modellierungen

Beispiel: Medikamentenspiegel im Körper:

Bei diesem einfachen Modell treffen wir die folgenden vereinfachenden Annahmen:  
Die Anfangsdosis eines Medikaments betrage 100 mg und diese wird alle 4 Stunden erneut abgegeben. Innerhalb dieser 4 Stunden werden jeweils 25% des Medikaments vom Körper abgebaut und ausgeschieden.

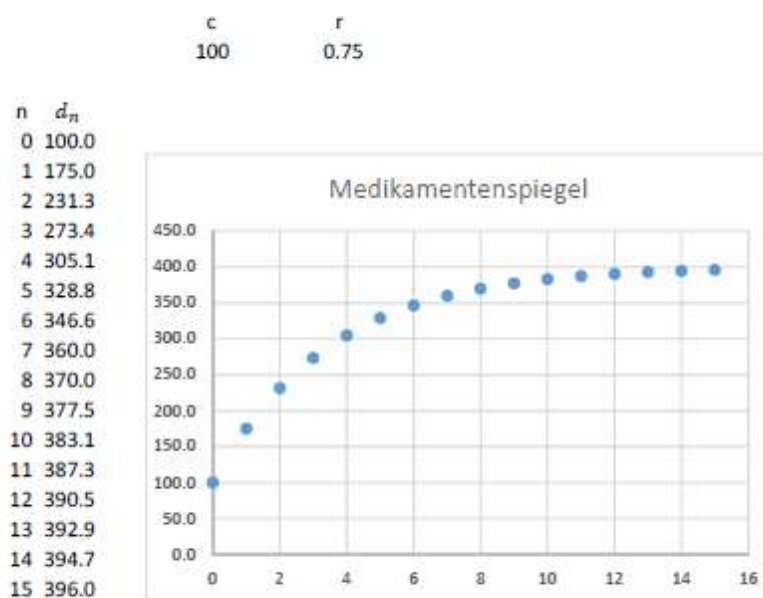
Wie entwickelt sich der Medikamentenspiegel im Körper im Laufe der Zeit?

Wir bezeichnen die im Körper nach  $n$  Perioden zu 4 Stunden vorhandene Menge des Medikaments in mg mit  $d_n$ . Für  $d_n$  gilt dann die folgende rekursive Beschreibung:

$$d_0 = 100 \text{ und } d_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot d_n + 100 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die langfristige Entwicklung kann dann numerisch bestimmt werden:

### Medikamentenspiegel



Es ist zu erkennen, dass sich der Medikamentenspiegel langfristig 400 mg nähert.  
Es handelt sich um beschränktes Wachstum.

Allgemein:

Es sei

$r$  die Abbaurate (im Beispiel  $r = 0.75$ )

$c$  die Anfangsdosis in mg

$d_n$  die Menge des Medikaments in mg nach  $n$  Perioden

$d_n$  kann mit der Rekursionsformel  $d_{n+1} = r \cdot d_n + c$  schrittweise berechnet werden:

$$d_1 = r \cdot d_0 + c$$

$$d_2 = r \cdot d_1 + c = r \cdot (r \cdot d_0 + c) + c = r^2 d_0 + c(r + 1)$$

$$d_3 = r \cdot d_2 + c = r \cdot (r^2 d_0 + c(r + 1)) + c = r^3 d_0 + c(r^2 + r + 1)$$

$$d_4 = r \cdot d_3 + c = r \cdot (r^3 d_0 + c(r^2 + r + 1)) + c = r^4 d_0 + c(r^3 + r^2 + r + 1)$$

...

Mit induktivem Schliessen ergibt sich schliesslich eine explizite Formel für  $d_n$ :

$$d_n = r^n d_0 + c(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1) = r^n d_0 + c \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Mit wachsendem  $n$  kommt dieser Ausdruck schliesslich dem folgenden Wert beliebig nahe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( r^n d_0 + c \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \right) = \frac{c}{1 - r} \quad \text{sofern } 0 < r < 1.$$

Weitere Fragen:

Verhalten des Wachstumsmodells, wenn

$r > 1$  (Geburtenüberschuss) bzw.  $c < 0$  (Wanderungsverlust)

Literatur:

Hupfeld: Dynasys. Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme. Freeware. 2004

Download <http://code.google.com/p/dynasys/>

Eine stetige Betrachtung statt diskreter Zeitschritte führt auf

→Differentialgleichungen (siehe Analysis 2).

Am folgenden Beispiel wird zunächst ein alternatives Vorgehen erläutert:

Die lineare Differenzgleichung

$$3y_{k+1} = y_k + 6 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

wird in die folgende Normalform übergeführt:

$$y_{k+1} = \frac{1}{3} \cdot y_k + 2 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Inhomogene Gleichung (1)}$$

Zunächst wird die folgende Gleichung gelöst:

$$y_{k+1} = \frac{1}{3} \cdot y_k \quad \text{Homogene Gleichung (2)}$$

Dies ist die Rekursionsformel einer geometrischen Folge mit der Lösung von (1)

$$y_k = c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Der Versuch, ob eine Konstante  $s$  Lösung der inhomogenen Gleichung (2) existiert führt auf

$$s = \frac{1}{3} \cdot s + 2$$

mit der Lösung  $s = 3$

Für die allgemeine Lösung erhält man

Für die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man somit:

$$y_k = c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3 \quad (3)$$

Die Konstante  $c$  ist durch die Anfangsbedingung  $y_0$  bestimmt:

Eingesetzt in (3) ergibt sich:

$$y_0 = c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3$$

und damit

$$c = y_0 - 3$$

Damit lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems:

$$y_k = (y_0 - 3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Da die geometrische Folge  $\left(\frac{1}{3}\right)^k$  eine Nullfolge ist, nähert sich  $y_k$  für  $k$  gegen  $\infty$  immer mehr dem Wert 3, d.h. der Sättigungsgrenze  $s = 3$ .

Allgemeines Vorgehen bei  
Differenzgleichungen erster Ordnung

$$y_{k+1} = r \cdot y_k + p \quad r \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zunächst kann die Lösung der homogenen Gleichung  $y_{k+1} = r \cdot y_k$  angegeben werden, denn es handelt sich um eine geometrische Folge

$$y_k = c \cdot r^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Für negative  $r$  wechselt bei jedem Glied das Vorzeichen, die Folge ist alternierend (oszillierend)

Von speziellem Interesse ist der Fall  $|r| < 1$ , denn in diesem Fall ist die Folge konvergent

Für  $|r| > 1$  ist die Folge divergent.

Der Versuch, ob eine Konstante  $s$  Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_{k+1} = r \cdot y_k + p$$

sein kann, führt zum Erfolg:

$$s = r \cdot s + p$$

Diese Gleichung kann für  $r \neq 1$  nach  $p$  aufgelöst werden mit dem Resultat:

$$s = \frac{p}{1 - r}$$

Für die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man somit:

$$y_k = c \cdot r^k + \frac{p}{1 - r}$$

Insbesondere gilt:

$$y_0 = c \cdot r^0 + \frac{p}{1 - r}$$

und damit

$$c = y_0 - \frac{p}{1 - r} = y_0 - s$$

Damit ergibt sich für die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems zu:

$y_k = (y_0 - s) \cdot r^k + s \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$
--

Für  $y_0 > s$  ergibt sich eine monoton fallende Folge mit dem Grenzwert  $s$  (Sättigungsgrenze, „Abkühlen“)

Für  $y_0 < s$  ergibt sich eine monoton wachsende Folge mit dem Grenzwert  $s$  („Erwärmen“)

Bei Anwendungen in der Finanzwirtschaft ist der Aufzinsfaktor  $r = 1 + i$  grösser als 1 (27.7.2021 in der Regel ☺). Die in 8.1. hergeleitete Formel für nachschüssige Renten kann nun erneut hergeleitet werden.

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

R: jährliche Zahlung am Ende des Jahres

i: Zinssatz

r: Aufzinsfaktor  $1 + i$

n: Laufzeit

$E_n$ : Endwert der nachschüssigen Rente.

Es gilt die folgende Rekursionsformel:

$$E_0 = 0$$

$$E_{n+1} = (1 + i) \cdot E_n + R$$

Die allgemeine Lösung (5) ergibt sich wegen  $E_0 = 0$  zu

$$E_n = (-s) \cdot r^n + s \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5')$$

s erfüllt die Rekursionsbeziehung

$$s = (1 + i) \cdot s + R$$

daraus ergibt sich s zu  $s = -\frac{R}{i}$ .

Einsetzung in die allgemeine Lösung (5) erhält man

$$E_n = \frac{R}{i} \cdot ((1 + i)^n - 1)$$