

## 11. Reihenentwicklungen

Der Konvergenzbegriff bei beliebigen Reihen wird auf den Konvergenzbegriff bei Folgen zurückgeführt (siehe auch den Abschnitt: Nichtabbrechende geometrische Reihen).

Addieren wir die  $n$  ersten Glieder einer Folge  $a_n$ , so erhalten wir die sogenannte  $n$ -te Partialsumme oder  $n$ -te Teilsumme  $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Definition:

Eine unendliche Reihe heisst konvergent, wenn die Folge der Partialsummen einen Grenzwert  $s$  besitzt. Dieser Grenzwert  $s$  wird als Summe der unendlichen Reihe bezeichnet. Falls die Partialsummenfolge keinen Grenzwert besitzt, heisst die Reihe divergent.

Beispiele:

a)

Die nichtabbrechende geometrische Reihe hat für  $-1 < q < 1$  die Summe  $s = \frac{a_1}{1-q}$

b)

Wegen  $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$  hat die unendliche Reihe

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$  die Summe 1.

Im nächsten Abschnitt "Harmonische Reihen" wird das Beispiel einer divergenten Reihe besprochen.

Reihenentwicklungen spielen in der Mathematik bei vielen Anwendungen eine wichtige Rolle (→ Potenzreihen).

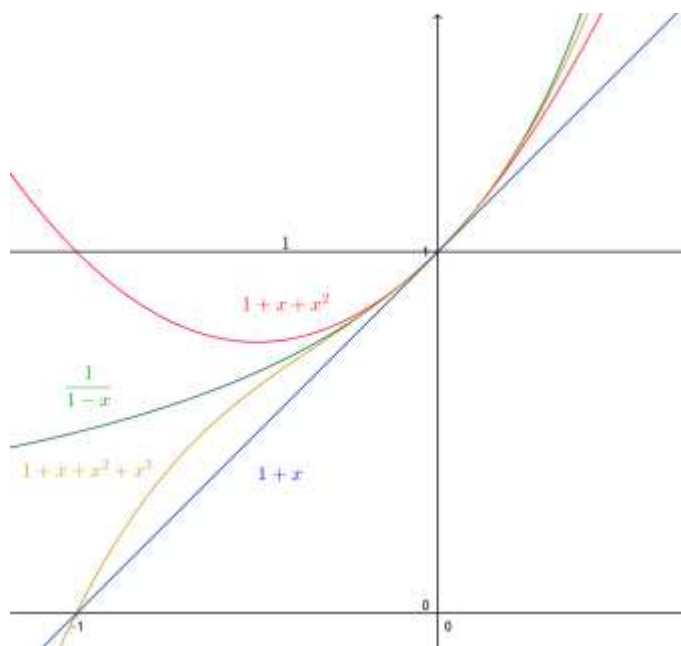
Als einführendes Beispiel schreiben wir die Formel für die nicht abbrechende geometrische Reihe in der folgenden Form:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Wir sagen  $\frac{1}{1-x}$  wird in eine

Potenzreihe entwickelt.

Skizze mit den Graphen der Näherungsfunktionen.



Einfache Anwendungen:

a)

Ein Näherungswert für  $\frac{1}{0.98}$

$$\frac{1}{0.98} = \frac{1}{1-0.02} \approx 1 + 0.02 + 0.04 = 1.0204$$

Vergleich mit dem TR-Wert: 1.0204081632...

b)

Entwicklung von  $\frac{3}{3-x}$  in eine Potenzreihe.

$$\frac{3}{3-x} \text{ wird umgeformt zu } \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \dots \text{ sofern } |x| < 3$$

In Formelsammlungen findet man die Reihenentwicklungen der elementaren Funktionen wie etwa von

$\sin x, \cos x, \ln(1+x), \dots$ . Ihre Herleitung erfordert zusätzliche Kenntnisse aus der Differential- bzw. Integralrechnung.

Als Beispiel sei die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion erwähnt:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$