1.1 Grundlegende Zahlenmengen

Georg Cantor (1845-1918) hat den Begriff der Menge eingeführt. Man versteht darunter die Zusammenfassung einzelner Dinge, welche Elemente genannt werden, zu einem Ganzen.

Dieser Abschnitt gibt eine Übersicht über die grundlegenden Zahlenmengen nämlich:
Die Menge **N** der natürlichen Zahlen
Die Menge **Z** der ganzen Zahlen
Die Menge **Q** der rationalen Zahlen
Die Menge **R** der reellen Zahlen

Die Menge **C** der komplexen Zahlen wird im Kapitel „Weitere Themen“ behandelt.

1. Die Menge der natürlichen Zahlen N = {1, 2, 3, 4,.....}

„ Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht.
Alles andere ist Menschenwerk.“ Leopold Kronecker, 1821

Für die Aussage „4 ist Element der Menge N“ d.h. „4 ist eine natürliche Zahl“ schreibt man kurz $4 \in N$ und entsprechend $-1 \notin N$, da -1 keine natürliche Zahl ist.

N ist bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen, d.h. in **N** sind Addition und Multiplikation unbeschränkt durchführbar.
Hin und ist es sinnvoll, die Menge N mit der Zahl 0 zu ergänzen, wofür kurz geschrieben wird: $\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\} = \{0,1,2,3,4,.....\}$

Unter einer **Primzahl** versteht man eine natürliche Zahl mit genau zwei Teilern.
Die Menge der Primzahlen P = {2,3,5,7,.....} ist eine wichtige Teilmenge von **N** oder symbolisch $P \subset N$, denn jede Primzahl ist insbesondere auch eine natürliche Zahl.

Schon Euklid (um 300 v. Chr.) hat bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Primzahl-Rekordhalter war 2018 die Zahl $2^{82.589.933}-1$ mit 24.862.048 Stellen. Den aktuellen Rekordhalter findet man im Internet unter http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahl.
"Grosse" Primzahlen spielen bei der Verschlüsselung von Daten (Kryptologie) eine wichtige Rolle.

Es gilt der folgende

Satz von der eindeutigen Primzahlzerlegung: Jede natürliche Zahl kann eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen dargestellt werden.

Beispiele:
$720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, $84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7$

Aus der Primzahlzerlegung zweier Zahlen ergeben sich der grösste gemeinsame Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier natürlicher Zahlen. Für den ggT der beiden Zahlen wird der Exponent jeder Primzahl minimal, beim kgV maximal gewählt.

Beispiele:
ggT(720,84) = $2^2 \cdot 3^1$, kgV(720,84) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, ggT(26,9) = 1

Zwei natürliche Zahlen a und b mit dem grössten gemeinsamen Teiler 1 heissen teilerfremd oder kurz
ggT(a,b) = 1

Mögliche Ergänzungen zum Thema werden im Kapitel „Weitere Themen“ $\rightarrow$ Zahlentheorie besprochen, wie etwa:
- Das Sieb des Eratosthenes (275 v. Chr. - 195 v. Chr.) zur Bestimmung der Primzahlen.
- Der Euklidische Algorithmus (vereinfacht ausgedrückt ein Rechenverfahren) ermöglicht die Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers (ggT) zweier natürlicher Zahlen.

Der Zahlenbereich wird nun schrittweise erweitert bis schliesslich alle vier Grundoperationen unbeschränkt durchführbar sind. Die Definition dieser Operationen wird so gewählt, dass bei der Erweiterung die bekannten Gesetze gültig bleiben, insbesondere das distributive Gesetz.

2. Die Menge der ganzen Zahlen Z = {0,1,-1,2,-2,3,-3,.....}

Z ist bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen, d.h. diese Operationen sind unbeschränkt durchführbar. In **Z** hat die Gleichung a + x = b eine eindeutig bestimmte Lösung.
Die Subtraktion kann auf die Addition der Gegenzahl -b von b zurückgeführt werden:

$$a - b := a + (-b)$$

Beispiele:
$2 - 5 = 2 + (-5) = -3,$ $\qquad 4 - (-7) = 4 + 7 = 11$

3. Die Menge der rationalen Zahlen $\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{n}} \quad , n \in N,\ z \in Z \right\}$

Die Menge **Q** der rationalen Zahlen (Brüche) besteht aus den Zahlen, die sich als Bruch mit Zähler z und Nenner n darstellen lassen.

Multipliziert oder dividiert man Zähler und Nenner einer einer natürlichen Zahl, so verändert sich Wert des Bruchs nicht (Kürzen oder Erweitern)

$$\frac{z}{n} = \frac{k \cdot z}{k \cdot n}$$

Beispiel:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{24}{36}$$

Das Kürzen oder Erweitern ist nicht zu verwechseln mit der Multiplikation von Brüchen.Zwei rationale Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Zähler und Nenner multipliziert.

Die Multiplikation von Brüchen ist einfacher als die Addition.

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man die Zähler und die Nenner multipliziert:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Beispiel:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 8} = \frac{3}{4}$$

Statt die Produkte auszurechnen, prüft man besser, ob ein Faktor (wie im Beispiel 2 bzw. 3) gekürzt werden kann.

In **Q** ist damit auch die Gleichung $a \cdot x = b$ für $a \neq 0$ unbeschränkt und eindeutig lösbar.

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation. Zwei rationale Zahlen werden dividiert, indem man die erste Zahl mit dem Kehrwert der zweiten multipliziert.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Beispiel:

$$\frac{3}{4} \div \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$$

Stimmen bei der Adition im einfachsten die Nenner der beiden Brüche überein, dann gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

Sind die Nenner verschieden, dann können die Brüche erweitert werden.
Dazu zunächst ein Beispiel:

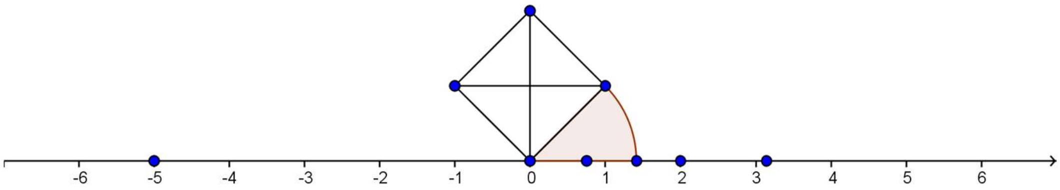
$$\frac{5}{9}+\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 4}{9\cdot 4}+\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{20+15}{36}=\frac{35}{36}$$

Das Beispiel illustriert, dass als Nenner der Summe ein gemeinsames Vielfaches gesucht ist.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{d\cdot b}$$

Damit ist auch die Subtraktion definiert. Dazu ist das Pluszeichen durch das Minuszeichen zu ersetzen.

Jeder rationalen Zahl ist eindeutig ein Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet.



Die rationalen Zahlen liegen dicht auf der Zahlengeraden, denn zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen r_1 und r_2 lassen sich stets weitere Zahlen angeben z.B.:
$\frac{1}{2}\cdot(r_1+r_2)$
Trotzdem gibt es Punkte auf der Zahlengeraden, denen keine rationale Zahl entspricht, z.B. π, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$,...

> Satz:
> $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweisidee:
Es wird gezeigt, dass die Annahme, $\sqrt{2}$ sei rational, auf einen Widerspruch führt (Methode des indirekten Beweises).
Annahme:
Es gibt eine Darstellung $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ mit ggT(a, b) = 1.
(der grösste gemeinsame Teiler von a und b ist 1).
Quadriert man die Gleichung, dann ist $2b^2 = a^2$. Die Zahl auf der linken Seite enthält den Primfaktor 2 in ungerader Anzahl, die auf der rechten Seite in gerader Anzahl, denn das Quadrat einer natürlichen Zahl enthält jeden Primfaktor doppelt ($6 = 2\cdot3$ und $6^2 = 2^2\cdot3^2$). Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Also ist $\sqrt{2}$ nicht rational.

Stellt man eine rationale Zahl als Dezimalbruch dar, dann können wie die folgenden Beispiele zeigen verschiedene Fälle auftreten:

Beispiele:

$\frac{15}{4}=\frac{375}{100}=3.75$	der Dezimalbruch bricht ab
$\frac{37}{50}=\frac{74}{100}=0.74$	der Dezimalbruch bricht ab
$\frac{2}{7}=0.\underline{285714}285714285714$	Der Dezimalbruch ist periodisch (Periodenlänge 6)
$\frac{12}{55}=0.2\underline{18}181818...$	Der Dezimalbruch ist periodisch mit der Vorperiode 2.

Enthält die Primfaktorzerlegung des Nenners nur die Faktoren 2 oder 5, dann kann der Nenner durch Erweitern als Zehnerpotenz dargestellt werden. Die Dezimalbruchentwicklung ist in diesem Fall abbrechend.
Kommen in der Primfaktorzerlegung des Nenners q ausser 2 und 5 andere Primfaktoren vor, so kommt nach spätestens q - 1 Divisionsschritten ein Rest vor, der schon einmal aufgetreten ist. Es entsteht ein periodischer Dezimalbruch (ev. mit Vorperiode). Die maximale Periodenlänge ist q – 1 wie etwa im Beispiel:
$1/17 = 0.0\underline{588235294117647}\ 0588\ldots$

Allgemein gilt:
Die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl ist abbrechend oder periodisch.
Im Kapitel „Folgen“ wird später gezeigt, dass umgekehrt jeder periodische Dezimalbruch als rationale Zahl dargestellt werden kann.

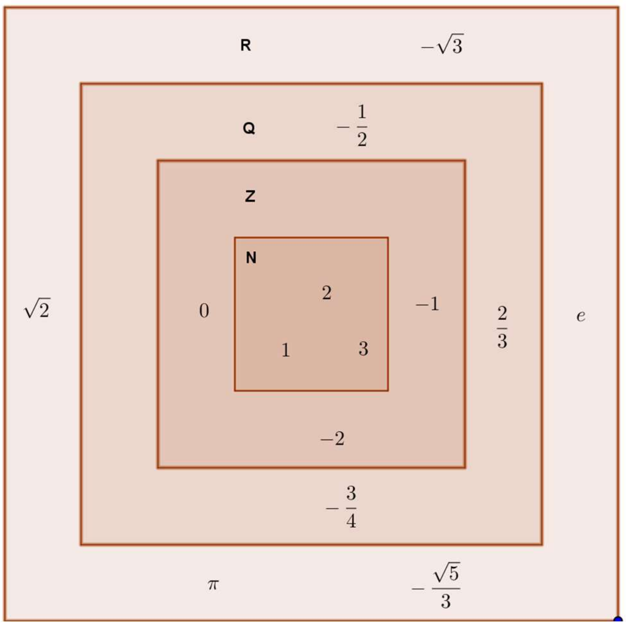
Die Menge der Zahlen, die nicht als rationale Zahlen darstellbar sind, heisst **Menge I der irrationalen Zahlen**. Sie besteht aus allen Dezimalbrüchen, die weder abbrechend noch periodisch sind wie etwa:

$\sqrt{2} = 1.41421356237309574 25\ldots$	oder andere Wurzeln aus Nicht-Quadratzahlen.
$\pi = 3.141592653589793...$	
$e = 2.718281828459045...$	Die sogenannte Eulersche Zahl · $\rightarrow$ Kapitel „Folgen“
0.1010010001000010000001...	Bei diesem Dezimalbruch vergrössert sich die Anzahl der Ziffern 0 nach jeder 1 um 1.
0.14916253649...	Die Ziffern ergeben sich, indem man die Quadrate der natürlichen Zahlen hinter-einander aufschreibt.
0.12624120720...	Die Ziffern ergeben sich , indem man die Fakultäten ($\rightarrow$ Kapitel „Folgen“) hinter-einander aufschreibt.

Der Taschenrechner (TR) liefert für irrationale Zahlen Näherungswerte.

4. Die Menge der reellen Zahlen R = Q $\cup$ I.

Die Menge der reellen Zahlen ist also die Vereinigung der Menge der rationalen Zahlen Q und der Menge der irrationalen Zahlen I. Die Bilder der reellen Zahlen füllen die Zahlengerade lückenlos.



Das Problem, quadratische Gleichungen der Form $x^2 = a$ auch für negative Zahlen zu lösen, führt schliesslich auf die **Menge C der komplexen Zahlen**.

Die folgenden Ergänzungen machen Voraussetzungen, die erst später im Abschnitt → Lineare Funktionen besprochen werden:

Mächtigkeit von Mengen, abzählbare und über abzählbare Zahlenmengen

Obwohl **N** eine echte Teilmenge von **Z** und **Z** eine echte Teilmenge von **Q** ist, haben diese drei Mengen die gleiche Mächtigkeit, denn die Elemente von **Z** bzw. **Q** können wie im Folgenden gezeigt wird ebenfalls nummeriert werden. Mengen dieses Typs heissen abzählbar.

N: 1, 2, 3, …
Z: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, …
Auch **Q** ist abzählbar. Dazu werden die Brüche nach der Summe von Zähler und Nenner geordnet, gekürzte Brüche werden gestrichen. Nach der gleichen Idee wie bei der Menge Z sind dann alle Brüche abzählbar.
0, 1/1, -1/1, , 1/2, - 1/2, 2/1, - 2/1, 1/3, - 1/3, 3/1, - 3/1, 1/4, - 1/4, 4/1, - 4/1, , 2/3, - 2/3, 3/2, - 3/2, 1/5

Die Menge der reellen Zahlen **R** hingegen ist überabzählbar.

Dazu zeigt man indirekt: Schon das Intervall]0,1[ist überabzählbar:
Annahme: Die Zahlen des Intervalls lassen sich nummerieren.
0.**3**69729104…
0.1**5**3093747…
0.00**1**075892…
0.369**7**29114…
…
…
Es kann nun eine Zahl angegeben werden, die in dieser Liste nicht vorkommt, da sie an der 1. Stelle nicht mit der 1. Zahl, an der 2. Stelle nicht mit der 2. Zahl, usf. übereinstimmt. Dazu wird an jeder Stelle die Ziffer verändert, indem man z.B. die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 um 1 vergrössert und die Ziffern 5, 6, 7, 8, 9 um 1 verkleinert. Die so konstruierte neue Zahl 0. **4626**… weicht an mindestens einer Stelle von jeder der aufgeführten Zahlen ab, im Widerspruch zur Annahme, es könnten alle Zahlen nummeriert werden.

Die Aussage dass **R** überabzählbar ist kann folgendermassen geometrisch interpretiert werden:

Das Punktegitter ist unbegrenzt fortgesetzt zu denken. Die Gerade mit der Gleichung $y = \sqrt{2} \cdot x$ trifft keinen Gitterpunkt mit ganzzahligen Koordinaten. Würde es nämlich einen solchen Punkt geben, dann könnte die Steigung als rationale Zahl dargestellt werden.
Sobald es einen Punkt gäbe, gäbe es sogar unendlich viele weitere, denn die Koordinaten dieses Punktes könnten mit einem gemeinsamen Vielfachen multipliziert werden. Da die rationalen Zahlen abzählbar sind, die irrationalen überabzählbar, gibt es sogar „mehr“ Geraden, die das Gitternetz nicht treffen als solche, die das Gitternetz treffen.