1.7. Die lineare Funktion

Einführendes Beispiel:
Die Taxitarife in Schweizer Städten sind etwa wie folgt aufgebaut:
Für Fahrten ist eine Grundgebühr von Fr. 7.- und zusätzlich pro gefahrenen Kilometer Fr. 3.40 zu bezahlen (Stand 2022).
Die Kosten y (in Fr.) für eine Fahrt von x (in km) sind eine lineare Funktion der Fahrtlänge:
f: $x \rightarrow y = 3.40 \cdot x + 7$

> Allgemein :
> **Die Funktion f: $x \rightarrow y = m \cdot x + q \quad m, q \in R$ heisst lineare Funktion.**

Die Funktionsvorschrift f bedeutet: Multipliziere die gegebene Zahl mit m und addiere q.

Die direkte Proportionalität ist ein Spezialfall der linearen Funktion (q = 0).

Beispiele von linearen Funktionen

Bei vielen Tarifen sind die Kosten eine lineare Funktion des Verbrauchs.
a)
Eine Helikopterfirma verlangt für Materialtransporte eine Grundgebühr von Fr. 140.- und pro Flugminute Fr. 39.- (Stand: 2013)
Die Kosten y (in Fr.) für einen Flug von x (in Minuten) sind eine lineare Funktion der Flugzeit:
$f: x \rightarrow y = 38 \cdot x + 120$

b)

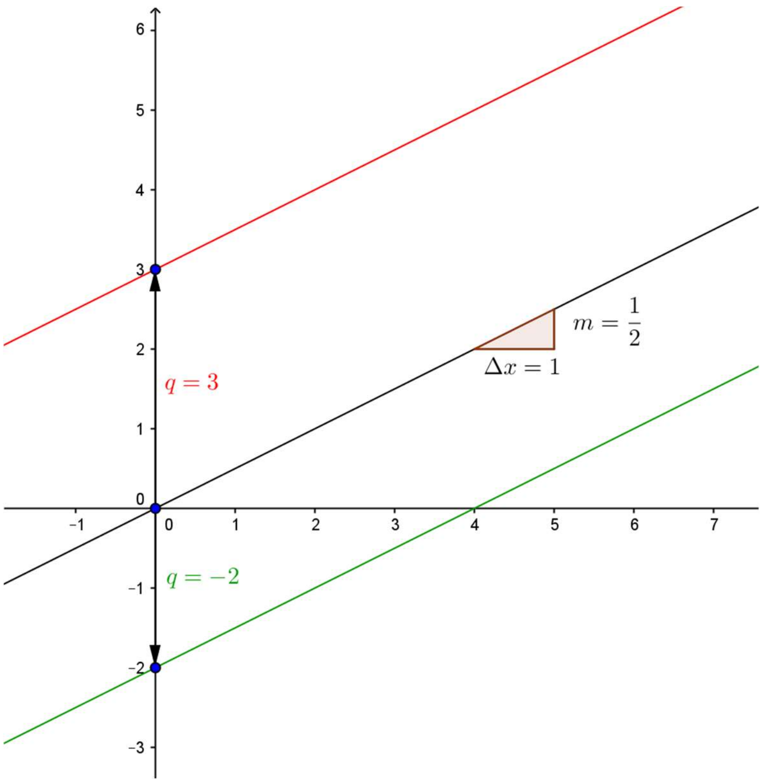
Wer ein Buch drucken lässt, bezahlt eine Grundgebühr von Fr. 510.- und pro Exemplar Fr. 12.-.
Die Herstellungskosten y sind eine lineare Funktion der Auflage x.
$f: x \rightarrow y = 12 \cdot x + 510$

c)
In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Grösse des Basiswinkels y eine Funktion des Winkels an der Spitze x.
$f: x \rightarrow y = 90 - \frac{1}{2} \cdot x$

d)
Ein Behälter enthält 20 *l* Wasser. Um 12 Uhr wird die Pumpe eingeschaltet, die in zwei Sekunden einen Liter Wasser absaugt. Wie gross ist die Wassermenge y (in Liter), die sich t Sekunden nach 12 Uhr im Behälter befindet?
$f: x \rightarrow y = 20 - \frac{1}{2} \cdot x$

Bemerkung:
Verdoppelt man x, so verdoppelt sich bei einer Proportionalität auch der Funktionswert y, bei einer linearen Funktion gilt dies nur wenn q = 0.

Aufgabe:
Es sind die Graphen der linearen Funktion $f: x \to y = m \cdot x + q$ für die folgenden Parameter darzustellen:
$m = \frac{1}{2}$, q = 3, -2, 0.



$$\begin{array}{lcccccccccccc} x & -2 & \xrightarrow{+1} & -1 & \xrightarrow{+1} & 0 & \xrightarrow{+1} & 1 & \xrightarrow{+1} & 2 & \xrightarrow{+1} & 3 \\ y & -2m+q & \xrightarrow{+m} & -m+q & \xrightarrow{+m} & q & \xrightarrow{+m} & m+q & \xrightarrow{+m} & 2m+q & \xrightarrow{+m} & 3m+q \end{array}$$

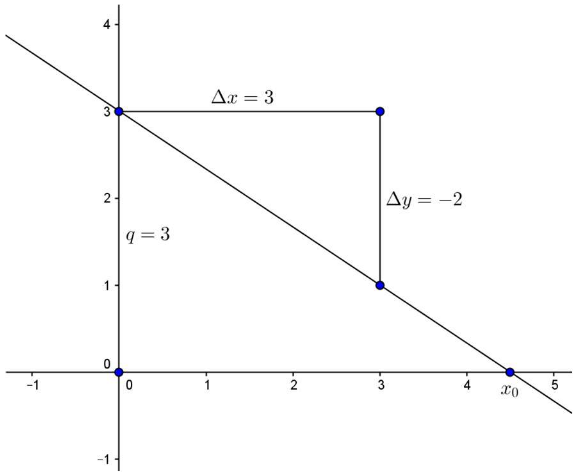
Die Wertetabelle zeigt, wenn x um 1 wächst, so verändert sich y gerade um m.

Satz:
Der Graph der linearen Funktion $f: x \to y = m \cdot x + q$ m, q $\in$ **R** ist eine Gerade mit der Steigung m durch den Punkt (0, q), q heisst y-Achsenabschnitt der Geraden. Die Gerade geht aus der Geraden mit der Gleichung y = mx durch eine Translation in y-Richtung um q Einheiten hervor.
Für m > 0 steigt die Gerade, für m < 0 fällt sie. Für m = 0 verläuft die Gerade parallel zur x-Achse.

Aufgabe:
Gegeben ist die lineare Funktion $f: x \rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot x + 3$

a) Gesucht ist der Graph der Funktion
b) Welcher Funktionswert ergibt sich an der Stelle 3?
c) Für welches x gilt: f(x) = -5 bzw. f(x) = 0 und wie können diese Aussagen geometrisch interpretiert werden?

a)
Der Graph ist eine Gerade. Aus der Funktionsgleichung können die Steigung $m = -\frac{2}{3}$ und der y-Achsenabschnitt q = 3 herausgelesen werden. Steigung m bedeutet: wenn x um 3 zunimmt, dann nimmt y um 2 ab.



Variante:
Der Graph kann auch mit Hilfe zweier geeigneter Punkte z.B. A(-6, 4) und B(0, 3) gezeichnet werden.

b)
$f(3) = 1$ erhält man durch Einsetzen in die Funktionsgleichung, der zugehörige Geradenpunkt A hat also die Koordinaten A(3, 1)

c)
Die Gleichung $y = -\frac{2}{3} \cdot x + 3$ kann für y = -5 bzw. y = 0 nach x aufgelöst werden. Der ersten Lösung entspricht der Geradenpunkt B(12, -5), der zweiten der Schnittpunkt $S(-\frac{9}{2}, 0)$ der Geraden mit der x-Achse. In diesem Fall sagt man:
Die lineare Funktion f hat die Nullstelle $x_0 = -\frac{9}{2}$.

Explizite, implizite Form der Geradengleichung

Umgekehrt kann jede Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist, als Graph einer linearen Funktion aufgefasst werden, das heisst die Gerade kann durch eine Gleichung der Form y = mx + q dargestellt werden.

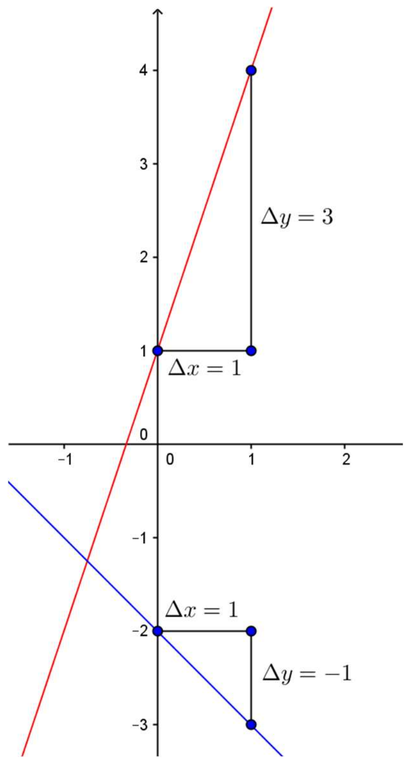
Aufgabe:
Bestimme eine Gleichung der folgenden Geraden, wenn zwei Punkte gegeben sind:

a) A(0, 1), B(1, 4) b) A(0, -2) B(1, -3)

a)
Der y-Achsenabschnitt q = 1 ist gegeben. Vergrössert man x um 1, so nimmt y um 3 zu. Die Steigung der Geraden ist also m = 3
Geradengleichung: y = 3x + 1

Lösungsvariante:
Die Gleichung der Geraden kann in der Form
$y = mx + 1$ angesetzt werden.
Die Koordinaten von B erfüllen diese Geradengleichung, es gilt also:
$4 = m \cdot 1 + 1.$
Damit ist m = 3.

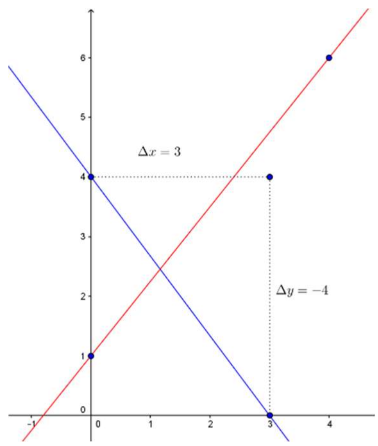
b) analog erhält man $y = -x - 2$



c) A(0, 4) B(3, 0) d) A(0, 1) B(4,6)

c)
Vergrössert man x um 3, so verändert sich y um -4.
Vergrössert man x um 1, so verändert sich y um $-\frac{4}{3}$.
Die Steigung der Geraden ist also m = $-\frac{4}{3}$
g: y = $y = -\frac{4}{3} \cdot x + 4$

d) analog g: $y = \frac{5}{4} \cdot x + 1$

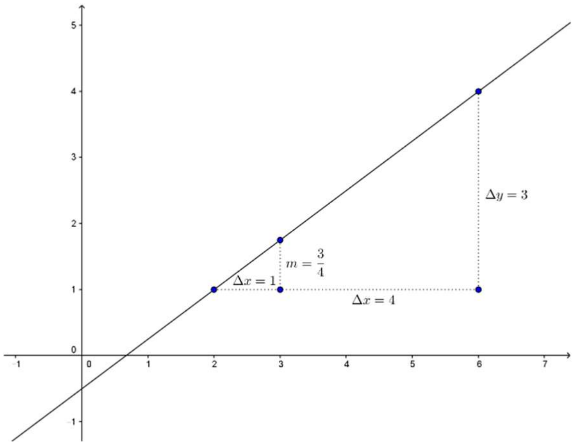


Übungsaufgaben:
Die folgenden Geraden sind durch zwei Punkte gegeben. Bestimme ihre Gleichung

a) A(0, 3), B(1, 5)	Lösung: $y = \quad 2x + 3$
b) A(0, 2), B(1, 5)	Lösung: $y = \quad 3x + 2$
c) A(3, 0), B(2, 2)	Lösung: $y = -2x + 6$
d) A$(0, -\frac{5}{3})$, B$(1, -\frac{1}{3})$	Lösung: $y = \quad \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

Häufig kennt man von einer Geraden zwei beliebige Punkte
Beispiel: A(2, 1) B(6, 4)

1. Lösungsweg:
Wächst x um 4, so verändert sich y um 3
Wächst x um 1, so wächst y um $\frac{3}{4}$
also ist $m = \frac{3}{4}$.
Die Gleichung der Geraden lässt sich damit in der folgenden Form ansetzen:
$y = \frac{3}{4} \cdot x + q$
q ist so zu bestimmen, dass die Koordinaten von A (oder B) die Geradengleichung erfüllen.
$y = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{2}$



2. Lösungsweg:
Die Koordinaten von A und B erfüllen die Geradengleichung
A(2, 1) $\quad 1 = 2m + q$
B(6, 4) $\quad 4 = 6m + q$

Mit der 1. Gleichung kann q in m ausgedrückt werden:
$q = 1 - 2m$ (*)
q kann in der zweiten Gleichung eingesetzt werden:

$4 = 6m + 1 - 2m$
Damit ist $m = \frac{3}{4}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (*) ein, so ergibt sich $q = -\frac{1}{2}$

Allgemein:
$A(x_A, y_A)$ erfüllt die Geradengleichung: $y_A = mx_A + q$
$B(x_B, y_B)$ erfüllt die Geradengleichung: $y_B = mx_B + q$

Subtrahiert man die erste von der zweiten Gleichung so erhält man:
$y_B - y_A = m \cdot (x_B - x_A)$ und daraus

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$
Steigung einer Geraden durch die Punkte A und B (A ≠ B)

Es ist anzustreben, die Gleichung einer Geraden ohne Skizze finden zu können. Eine Zeichnung der Geraden kann der Kontrolle dienen.

Beispiel:
Gleichung der Geraden durch die Punkte A(3, -2) B(-4, 3)

$$m = \frac{3-(-2)}{-4-3} = -\frac{5}{7}$$

Die Gleichung de Geraden ergibt sich damit zu:

$$y = -\frac{5}{7} \cdot x + \frac{1}{7}$$

Im Beispiel wurde die Gleichung in der Form

$$y = -\frac{5}{7} \cdot x + \frac{1}{7}$$

angegeben. Diese Gleichung heisst explizite Form
Diese Gleichung kann nach Multiplikation mit dem Nenner 7 auf die Form
5x + 7y - 1 = 0 gebracht werden. Diese Gleichung heisst implizite Form.
Nachteil:
Die Steigung und der y-Achsenabschnitt lassen sich nicht mehr direkt angeben.

Allgemein:

$\boldsymbol{y = m \cdot x + q}$
explizite Form der Geradengleichung.
$\boldsymbol{ax + by + c = 0 \qquad a^2 + b^2 \neq 0}$
implizite Form der Geradengleichung.

$\boldsymbol{a^2 + b^2 \neq 0}$ ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass a und b nicht beide 0 sein dürfen.

In der impliziten Form kann jede Gerade der Ebene (auch eine Parallele zur y-Achse) dargestellt werden. Ist nämlich eine Gerade parallel zur y-Achse, dann hat die x-Koordinate einen festen Wert, die y-Koordinate hingegen ist beliebig. In diesem Fall ist y keine lineare Funktion von x. Die Gleichung einer Parallelen zur y-Achse hat die Form $x = c$.
Es gilt also der folgende

Satz:
Jede Gerade der Ebene lässt sich durch eine Gleichung der Form
$\boldsymbol{ax + by + c = 0 \qquad a^2 + b^2 \neq 0}$
mit a, b, c $\in$ R darstellen.

Beweis:
1. Fall:
Ist b = 0 dann kann die Gleichung durch a ≠ 0 dividiert werden

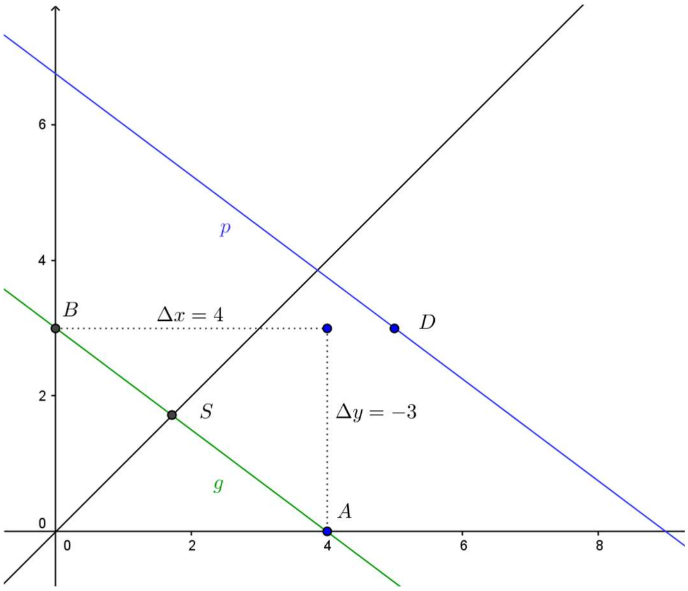
$x = -\frac{c}{a}$ Gleichung einer Parallelen zur y-Achse.

2. Fall: Ist b ≠ 0 dann kann die Gleichung nach y aufgelöst werden

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ Gleichung einer Geraden mit der

Steigung $m = -\frac{a}{b}$ und dem y-Achsenabschnitt $q = -\frac{c}{b}$.

Aufgabe:
Gegeben ist die Gerade g:
$3x + 4y - 12 = 0$ (1)



a)
Welche Steigung und welche Achsen-schnittpunkte hat g?

Führt man Gleichung (1) in die explizite Form
$y = -\frac{3}{4}x + 3$ (2)
über, dann können die Steigung $m = -\frac{3}{4}$ und der y-Achsenabschnitt q = 3 direkt abgelesen werden.

Die Koordinaten der Achsenschnittpunkte können auch direkt mit Gleichung (1) bestimmt werden:
Für den Schnittpunkt mit der x-Achse gilt: y = 0 A(4, 0)
Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt: x = 0 B(0, 3).

b)
Welche Koordinaten hat der Geradenpunkt C mit der x-Koordinate 100?

aus (2) y = -72 oder C(100, -72)

c)
Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt S von g mit der 1. Winkelhalbierenden?

Für einen Punkt der 1. Winkelhalbierenden stimmen x- und y-Koordinate überein.
(1) liefert die Koordinaten des Schnittpunkts $S\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$.

d)
Wie heisst die Gleichung der Parallelen p zur Geraden g durch den Punkt D(5, 3)

Da parallele Geraden die gleiche Steigung haben, kann p in der Form
p: $y = -\frac{3}{4}x + q$ angesetzt werden. q ist so zu wählen, dass die Koordinaten des Punktes D(5, 3) die Gleichung erfüllen:
$3 = -\frac{3}{4} \cdot 5 + q$ und damit $q = 3 + \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{27}{4}$.

Die Parallele hat also die Gleichung p: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{27}{4}$.

Spezialfälle:
Gesucht sind die Gleichungen der folgenden Geraden
a)
Parallele zur x-Achse durch den Punkt A(3, 2) y = 2 Gleichung der x-Achse y = 0
b)
Parallele zur y-Achse durch den Punkt B(-3, -4) x = -3 Gleichung der y-Achse x = 0

Übungsaufgaben:
a)
Die Gerade g mit der Steigung m = -2 geht durch den Punkt P(3, -4). Wie heisst ihre Gleichung?

Lösung:
Ansatz: g: y = -2x + b P(3, -2) erfüllt die Geradengleichung g: y = -2x + 4

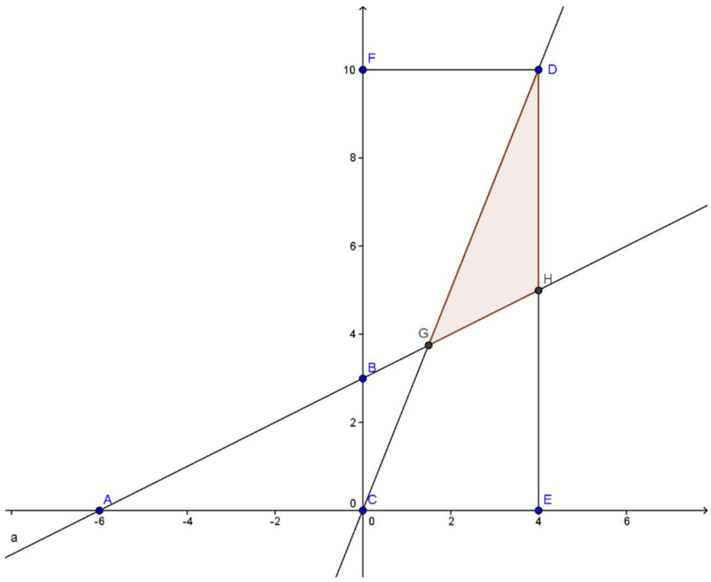
b)
Welche Gleichung hat die Parallele p zur Geraden g = A(20, 32), B(18, 29) durch den Punkt C(100, 200)?

Lösung: $y = \frac{3}{2}x + 50$

c):
Welchen Inhalt gat das abgebildete Dreieck DGH?

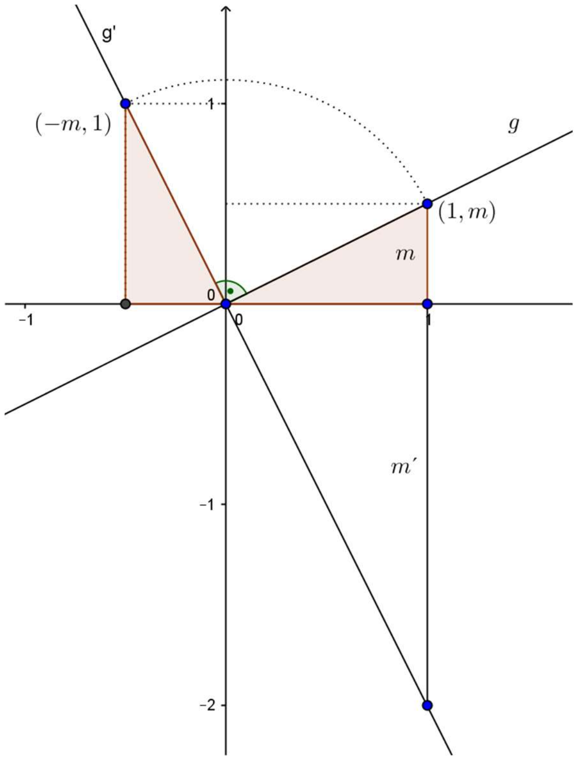
$CD: \quad y = \frac{5}{2}x$

GH: $y = \frac{1}{2}x + 3$
Im Schnittpunkt G stimmen die y-Koordinaten der beiden Geraden überein:
G: $y = \frac{1}{2}x + 3 = \frac{5}{2}x \quad x_G = \frac{3}{2} \quad y_G = \frac{15}{4}$
H: $x_H = 4, \quad y_H = \frac{1}{2}x_H + 3 = 5$
Dreieckshöhe: $h = x_H - x_G = \frac{5}{2}$,
Basis DH = 5,
Flächeninhalt: $\frac{25}{4}$



Senkrecht aufeinander stehende Geraden

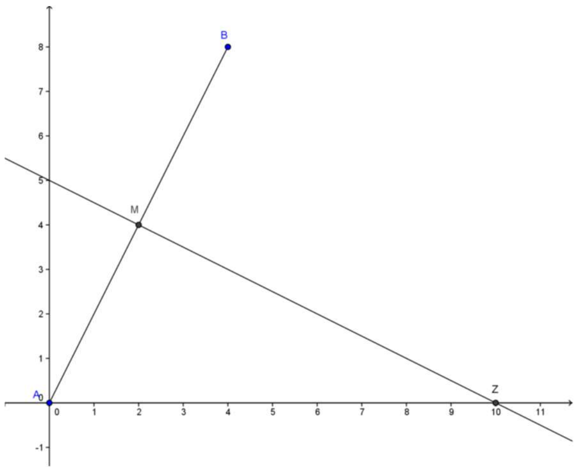
Skizze:
$m = \frac{1}{2}$, $m' = -2$



Der Punkt (1, m) geht bei einer Drehung um 90° in den Punkt (-m, 1) über. Damit hat die Gerade g´ die Steigung $m' = -\frac{1}{m}$.

> Satz:
> Stehen die Geraden g und g´ mit den Steigungen m und m´ aufeinander senkrecht, dann gilt:
> $m \cdot m' = -1$

Aufgabe:
Welcher Punkt Z der x-Achse hat von den Punkten A(0, 0) und B(4, 8) den gleichen Abstand?



Koordinaten des Mittelpunkts M der Geraden AB:
M(2, 4)
Steigung m der Geraden AB
m = 2
Steigung der Mittelsenkrechten von AB:
$m' = -\frac{1}{2}$
Ansatz für die Gleichung der Mittelsenkrechten
$y = -\frac{1}{2} \cdot x + q$
Die Koordinaten von M erfüllen die Gleichung:
$4 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + q$, womit q = 5. q = 5
Schnittpunkt mit der x-Achse:
$y = 0 = -\frac{1}{2} \cdot x + 5$, also ist x = 10
geometrisch: Z(10, 0) ist Mittelpunkt eines Kreises durch die Punkte A und B.

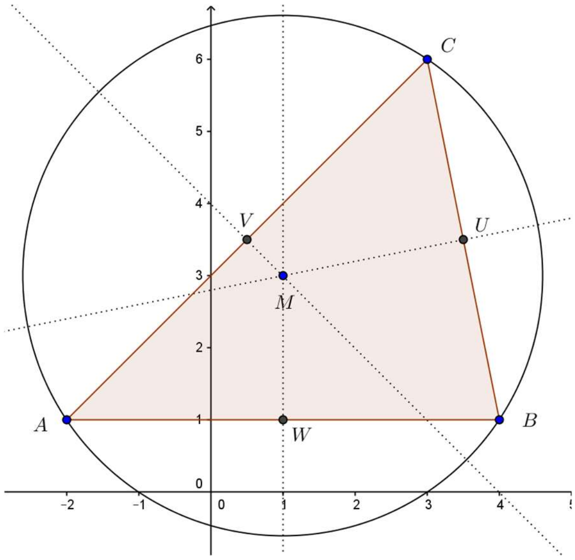
Übungsaufgabe:
Die Gerade g: 3x - 4y - 25 = 0 ist Tangente eines Kreises mit Mittelpunkt M(4, 3). Bestimme den Berührungspunkt B der Tangente mit dem Kreis.

Lösung: B(7, -1)

Die bereits erwähnte Aufgabe, den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks zu bestimmen, kann damit gelöst werden, indem man zwei Mittelsenkrechte schneidet.

Beispiel: Umkreismittelpunkts M des Dreiecks A(-2, 1), B(4, 1), C(3, 6)

Lösungsidee:
M ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke AB bzw. BC (oder AC)



Die Lösung wird vereinfacht, da die Mittelsenkrechte von AB parallel zur y-Achse ist. Sie hat die Gleichung
$x = \frac{-2+4}{2} = -1$
Der Mittelpunkt U der Strecke BC hat die Koordinaten
$U\left(\frac{4+3}{2}, \frac{1+6}{2}\right)$ also $U\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$
Die Gerade BC hat die Steigung
$m = \frac{6-1}{3-4} = -5.$
Für die Steigung der Mittelsenkrechten ergibt sich also
$m' = \frac{1}{5}$
Ansatz für die Gleichung der Mittelsenkrechten:
$y = \frac{1}{5} \cdot x + q$
q ist so zu bestimmen, dass U auf der Mittelsenkrechten liegt:
$\frac{7}{2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{2} + q$ ergibt $q = \frac{14}{5}$
Damit lautet die Gleichung der Mittelsenkrechten
$y = \frac{1}{5} \cdot x + \frac{14}{5}$
Ihr Schnittpunkt mit der Mittelsenkrechte von AB mit x = 1 ergibt $y = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{14}{5} = 3$
Der gesuchte Mittelpunkt hat also die Koordinaten M(1, 3).

Hinweis:
Die Mittelsenkrechte von AC hat die Gleichung $y = -x + 4$

Zusammenfassung:
Jede Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist, kann durch eine Gleichung der Form y = mx + q dargestellt werden (**explizite Form** der Geradengleichung).
Jede Gleichung der Form ax + by + c = 0 mit $a^2 + b^2 \neq 0$ (es dürfen nicht beide Koeffizienten gleich 0 sein) stellt eine Gerade dar (**implizite Form** der Geradengleichung).

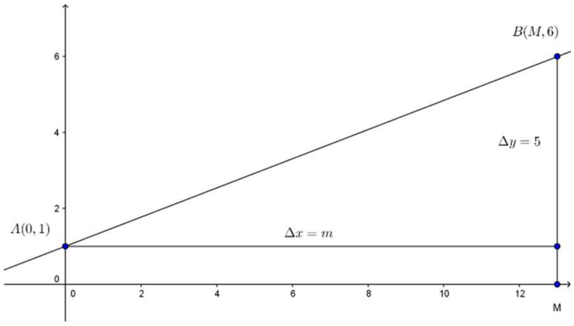
Lineare Funktionen in Anwendungen

Beispiele:

1. **Die lineare Notenskala**

Bei einer linearen Notenskala ist die Note y eine lineare Funktion der Punktzahl x.

In einer schriftlichen Arbeit sind maximal M = 13 Punkte zu erreichen. Für M = 13 Punkte gibt der Lehrer die Note 6, für 0 Punkte die Note 1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Punktzahl x und der Note y?



Die lineare Notenskala ist durch die beiden Geradenpunkte A(0, 1) und B(M, 6) eindeutig festgelegt zu:

$$f: x \rightarrow y = \frac{5}{M} \cdot x + 1$$

Im Beispiel bedeutet f: multipliziere die Punktzahl mit $\frac{5}{13}$ und addiere 1.

Zusatzfragen:
Welche Note erhält ein Schüler für die Punktzahl 9? f(9) = 4.46

Für welche Punktzahl erhält man die Note 4? d.h. für welches x ist f(x) = 4?
Gesucht ist die sogenannte Umkehrfunktion g von f

Dazu löst man die Gleichung $y = \frac{5}{M} \cdot x + 1$ nach x auf :

$y - 1 = \frac{5}{M} \cdot x$ und nach Multiplikation mit M: $x = \frac{M}{5} \cdot (y - 1)$

Mit der üblichen Variablenbezeichnung erhält man die Gleichung der Umkehrfunktion:

$$g: x \rightarrow y = \frac{M}{5} \cdot (x - 1)$$

Im Beispiel bedeutet g: subtrahiere 1 und multipliziere mit $\frac{13}{5}$.
Die Note 4 erhält man damit für g(4) = 7.8 Punkte.

Übungsaufgabe:
In Deutschland bezeichnet die Note 1 die beste Leistung, Note 6 die schlechteste. Wie bestimmt man bei einer Maximalpunktzahl M nach deutscher Notengebung die Note N für die Punktzahl P?

Lösung:
$f: x \rightarrow y = 6 - \frac{5}{M} \cdot x$

2. **Temperaturskalen**

Gabriel **Fahrenheit** (1686-1736) baute 1714 ein Quecksilberthermometer und führte die nach ihm benannte Fahrenheit-Skala (°F) ein, die in Amerika und England heute noch gebräuchlich ist.
1730 entwickelte der Franzose Seigneur de **Réaumur** (1683-1757) ein Weingeistthermometer und führte die Réaumur-Skala (°R) ein.
Der schwedische Astronom Anders **Celsius** (1701-1744) baute 1742 ebenfalls ein Quecksilberthermometer mit der bei uns gebräuchlichen Celsius-Skala (°C).
Die Physik verwendet wieder eine andere Temperaturskala, die **Kelvin**-Skala (°K) oder absolute Temperatur, benannt nach dem Briten Lord Kelvin (1824-1907).

Für den Gefrierpunkt und den Siedepunkt von Wasser gelten die folgenden Werte:

	Celsius	Reaumur	Fahrenheit	Kelvin
Gefrierpunkt:	0	0	32	273.16
Siedepunkt:	100	80	212	373.16

Das Problem der Umrechnung von der Celsius- in die Fahrenheitskala bedeutet in die Sprache der Geometrie übersetzt, dass die Gleichung der Geraden durch die Punkte A(0, 32) und B(100, 212) gesucht ist. Ihre Steigung ergibt sich zu

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$$

Die Umrechnung von der Celsius-Skala (x °C).in die Fahrenheit-Skala (y °F) wird also durch die folgende lineare Funktion beschrieben:

Übungsaufgaben:
a)
Welche linearen Funktionen beschreiben die Umrechnung von der Celsius-Skala (x °C).in die übrigen Skalen?

C → K: $f: x \to y = x + 273.16$ K → C: $f: x \to y = x - 273.16 \cdot$
C → R: $f: x \to y = \frac{4}{5} \cdot x$ R → C: $f: x \to y = \frac{5}{4} \cdot x$
C → F: $f: x \to y = \frac{9}{5} \cdot x + 32$ F → C : $f: x \to y = \frac{5}{9} \cdot (x - 32)$

b)
In New York sollen die Temperaturen im Juni zwischen 63 °F und 80 °F liegen. Welchem Intervall entsprechen diese Werte in der Celsius-Skala?

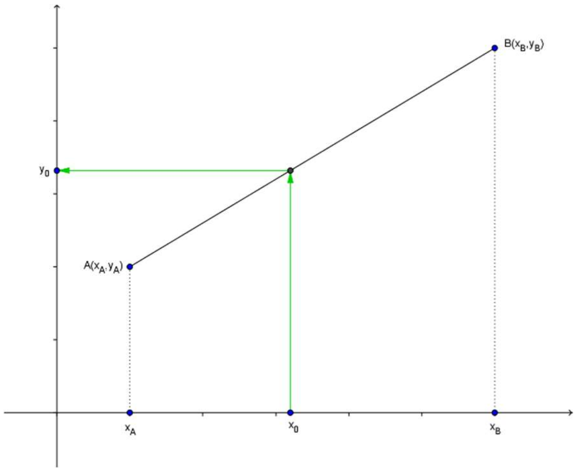
Lösung: Zwischen 17.2°C und 26.7°C

Zitat eines prominenten Reiseleiters in der Sonntagszeitung 10.11.1996:
Nur zwei Dinge, gesteht er freimütig, vermag er nicht zu erläutern: „Fragen Sie mich nicht, wie man Fahrenheit in Celsius umrechnet …“

3. **Lineare Interpolation**

In Anwendungen stellt sich oft das Problem, aus zwei Messpunkten oder Tabellenwerten einen plausiblen Zwischenwert zu gewinnen. Wählt man diesen Zwischenwert so, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen, so spricht man von linearer Interpolation.

Gleichung der Interpolationsgeraden:



Steigung der Geraden AB; $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Die Koordinaten des Punktes A erfüllen die Geradengleichung:

$y_A = m \cdot x_A + q$ oder $q = m \cdot x_A - y_A$

ergibt die Gleichung der Interpolationsgeraden:

$$y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$

Setzt man in dieser Gleichung für x den Wert x_0, so ergibt sich der plausible Zwischenwert y_0.

Beispiele:

a)

Bei einem Meilenrennen in der Leichtathletik wurden die beiden folgenden Zeiten gemessen:

Schlusszeit nach 1609.344 m: 3´ 30.18´´= 210.18´´

Durchgangszeit bei 1200 m: 2´ 38.45´´= 158.45´´

Vermutete Zwischenzeit in s nach 1500 m:

$158.45 + \frac{51.73}{409.344} \cdot 300 = 196.36''$ bzw. 3´ 16.36´´

b)

Der Druck des gesättigten Wasserdampfs bei 40°C beträgt etwa 7.38 kPa und bei 50° etwa 12.34 kPa. Bestimme mit linearer Interpolation einen plausiblen Wert für den Druck bei 43°C.

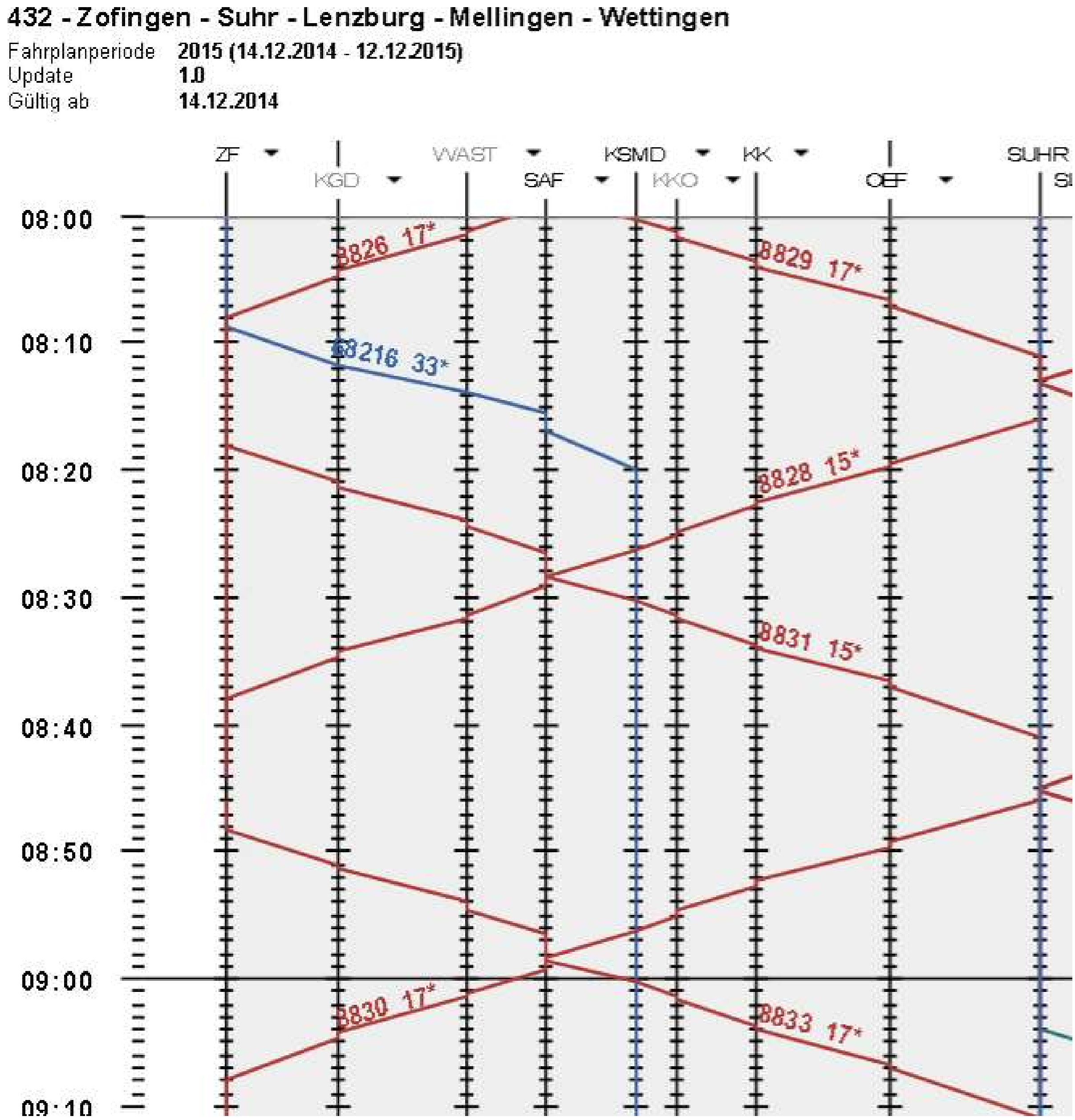
$y = 7.38 + \frac{12.34 - 7.38}{50 - 40} \cdot (43 - 40) = 8.87$ kPa.

4. **Graphischer Fahrplan**

Eine Anwendung der linearen Funktion bei der gleichförmigen Bewegung.

Als Beispiel ein Auszug aus dem Fahrplan von Zofingen nach Suhr.

Abkürzungen:
ZF: Zofingen, KGD: Küngoldingen, WAST: Walterswil-Striegel , KK Kölliken,
OEF: Oberentfelden



Quelle:
http://www.fahrplanfelder.ch/de/archiv/grafische-fahrplaene/

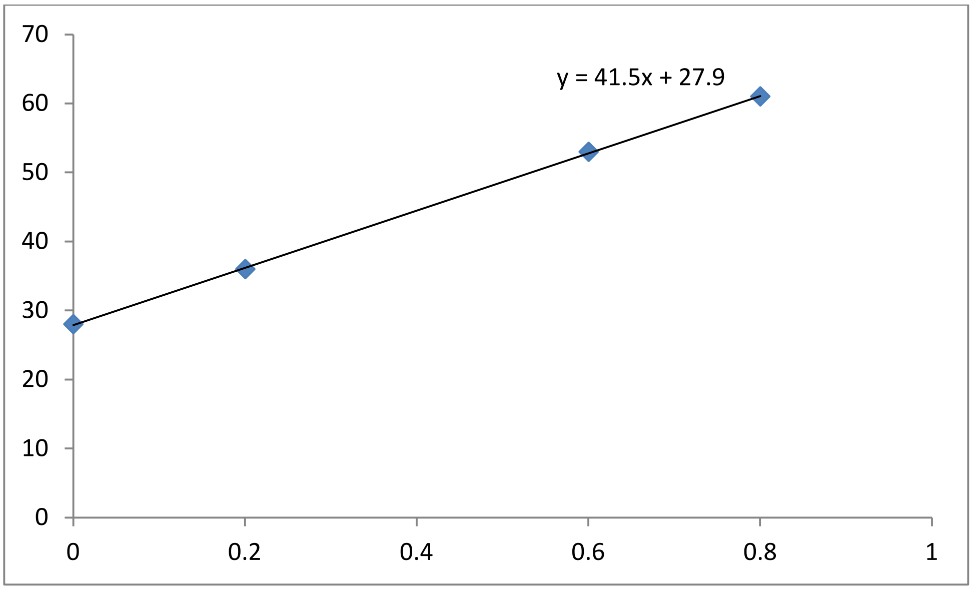
5. **Lineare Regression**

In Anwendungen stellt sich oft das Problem, gegebenen Messpunkten eine bestmögliche Gerade anzupassen. Dies ist das Problem der sogenannten Linearen Regression, das später im Kapitel Analysis →Polynomfunktionen →Extremalprobleme →Lineare Regression rechnerisch gelöst wird.

Im folgenden Beispiel wurde die Dehnung einer elastischen Feder in cm in Abhängigkeit von der Masse m in kg gemessen mit den folgenden Ergebnissen:

Masse m in kg	0	0.2	0.6	0.8
Dehnung l in cm	28	36	53	61

Die Ausgleichsgerade kann nun angenähert grafisch bestimmt werden, indem man eine Gerade möglichst gut den vier gegebenen Messpunkten anpasst. Die Gleichung der Geraden kann etwa mit Hilfe zweier Punkte der Ausgleichsgeraden bestimmt werden.



Das folgende Beispiel stammt aus der Finanzmarkttheorie: Rendite von Wertpapieren (Quelle UBS)

In der Finanzmarkttheorie wird häufig die Rendite eines Wertpapiers auf die Rendite des Marktes regressiert, d.h., die Rendite von Wertpapieren wird als **linear abhängig** von der Marktrendite betrachtet. Der Steigungskoeffizient der entsprechenden Gerade stellt den sogenannten Beta-Faktor (kurz β) dar. Der Achsenabschnitt ist die marktunabhängige Rendite a. Das entsprechende Modell bezeichnet man als Marktmodell

$$R = a + \beta \cdot R_M$$

mit	R	=	Aktienrendite (abhängige Variable)
	R_M	=	Marktrendite (unabhängige Variable)
	a	=	Marktunabhängige Rendite (Konstantglied)
	Beta (β)	=	Sensitivitätsmass (Koeffizient)

Beziehung zwischen Portfoliorendite und Marktrendite

Geradengleichung auf der Basis des Marktmodells:

$R = a + \beta \cdot R_M$

Aufgrund der historischen Beziehung ergibt sich für:

$a = 0.2965$
$\beta = 1.0849$

daraus ergibt sich:

$R = 0.2965\% + 1.0849 \cdot R_M$

Beträgt die Marktrendite 10%, dann kann man eine Rendite des Portfolios von

$R = 0.2965 + 1.0849 \cdot 10\% = 11.1455\%$

erwarten.

Es stellt sich nun die Frage, wie hoch die Marktrendite (R_M) ist, wenn die Portfoliorendite zum Beispiel 10% beträgt. In diesem Fall muss die lineare Gleichung

$R = a + \beta \cdot R_M$

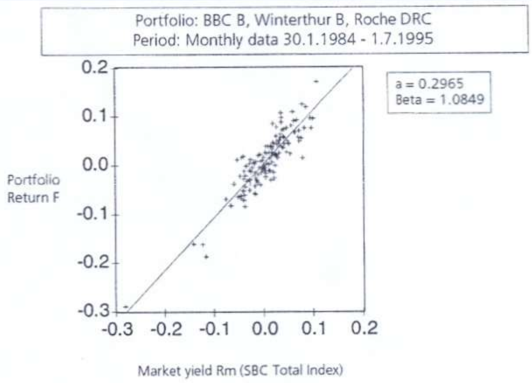
nach R_M aufgelöst werden.

1. Konstantglied auf linke Seite bringen

$R - a = \beta \cdot R_M$

2. Dividieren durch β

$(R - a)/\beta = R_M$



Der Beta-Koeffizient von 1.0849 resp. die Steigung der Geraden bedeutet: Wenn der SBV-Gesamtindex um 1% steigt/sinkt, dann wird das Portfolio, bestehend aus den drei Aktien, im *Durchschnitt* um 1.0849% steigen/sinken.

Im konkreten Beispiel muss

$R = 0.2965\% + 1.0849 \cdot R_M$

nach R_M aufgelöst werden.

1. Konstantglied auf linke Seite bringen

$R - 0.2965\% = 1.0849 \cdot R_M$

2. Dividieren durch 1.0849

$(R - 0.2965\%)/1.0849 = R_M$

Bei einer Portfoliorendite R = 10% beträgt die Marktrendite:

$R_M = (10\% - 0.2965\%)/1.0849 = \mathbf{8.9441\%}$