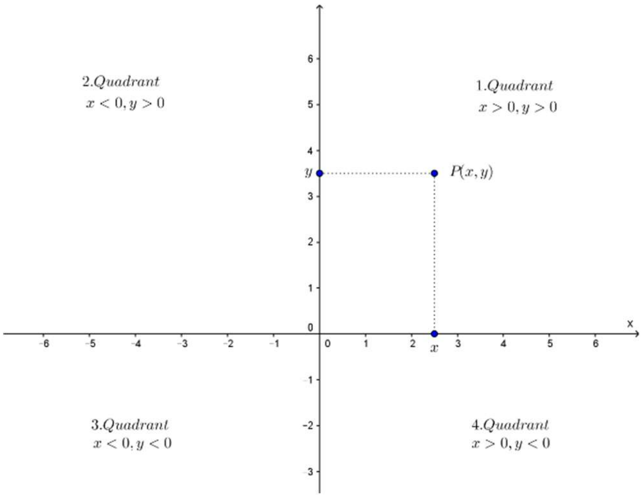
1.2 Das Koordinatensystem

René Descartes beschreibt in seinem Hauptwerk: Abhandlung über die Methode die Lage von Punkten mittels Koordinaten und stellt damit eine Verbindung zwischen Geometrie und Algebra her.

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.

Durch ein Koordinatensystem wird jedem Punkt P umkehrbar eindeutig ein Zahlenpaar (x, y) zugeordnet.



x-Achse	Abszissenachse
y-Achse	Ordinatenachse

Skizze: $P\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Aufgabe:
Der Punkt P(x, y) wird einfachen Abbildungen unterworfen. Welche Koordinaten hat der Bildpunkt P‘ in den folgenden Fällen?

a) Spiegelung an der x-Achse	P'(x, -y)	die y-Koordinate wechselt das Vorzeichen
b) Spiegelung an der y-Achse	P'(-x, y)	die x-Koordinate wechselt das Vorzeichen
c) Spiegelung am Nullpunkt	P'(-x, -y)	beide Koordinaten wechseln das Vorzeichen
d) Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden (sie halbiert den 1. und 3. Quadranten)	P'(y, x)	die Koordinaten werden vertauscht
e) Spiegelung an der 2. Winkelhalbierenden (sie halbiert den 2. und 4. Quadranten)	P'$(-y, -x)$	die Koordinaten werden und wechseln das Vorzeichen
f) um a Einheiten in x-Richtung verschoben	P'$(x + a, y)$	
g) um b Einheiten in y-Richtung verschoben	P'$(x, y + b)$	
h) um a Einheiten in x-Richtung und anschliessend um b Einheiten in y-Richtung verschoben.	P'$(x + a, y + b)$	

Aufgabe:
Wo liegen alle Punkte, deren Koordinaten die angegebene Gleichung erfüllen?

a) x = 0	Punkte der y-Achse
b) y = 0	Punkte der x-Achse
c) y = 3 / y = -1.5	Parallele zur x-Achse
d) x = 2 / x = -0.5	Parallele zur y - Achse
e) $-1 \leq y \leq 3$	Parallelenstreifen

Übungsaufgabe
Gegeben zwei Punkte A(x_A, y_A) und B(x_B, y_B). Gesucht sind die Koordinaten des Mittelpunkts M.

Lösung: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

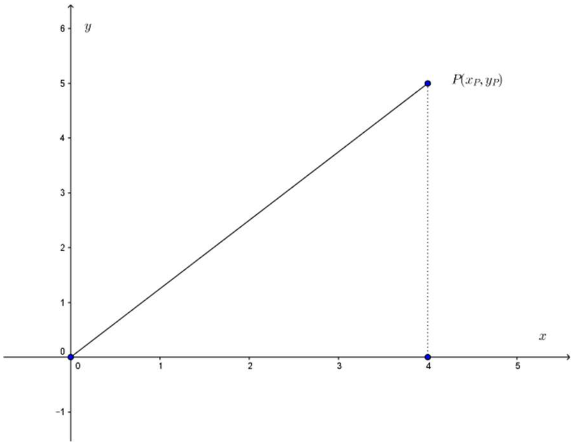
1.3 Abstand zweier Punkte

Spezialfall: Abstand d eines Punktes P(x_P, y_P) vom Nullpunkt.

$$d \;= x_P^2 + y_P^2$$
$$d = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$

Abstand des Punktes P(x_P, y_P) vom Nullpunkt
(nach Pythagoras)

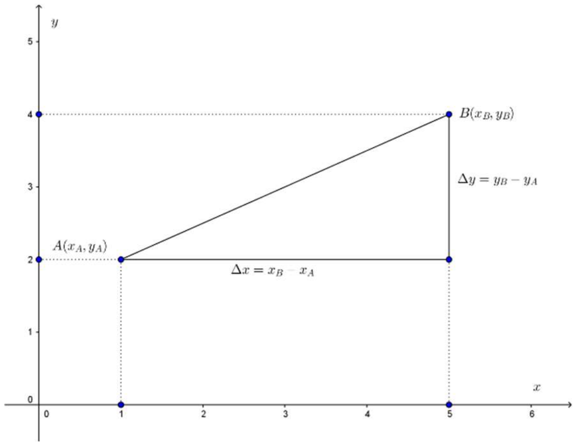
Beispiel Skizze:
P(4, 5) $\quad\quad d = \sqrt{41}$



Allgemeiner Fall:
Abstand d der Punkte A(x_A, y_A) und B(x_B, y_B)

$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$
Abstand der Punkte A(x_A, y_A) und B(x_B, y_B)



Die Abstandsformel gilt unabhängig von der
Lage von A und B in den vier Quadranten.

$\Delta x = x_B - x_A$ bezeichnet die Differenz der x-Koordinaten und entsprechend $\Delta y = y_B - y_A$ die der y-Koordinaten

Beispiel (vgl. Skizze): A(1, 2), B(5, 4) $\quad\quad d = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$

Übungsaufgaben:
a) Welchen Umfang hat das Dreieck A(3, 6), B(4, 5), C(-2, 5).
b) Es ist zu zeigen, dass der Punkt M(2, 1) Umkreiszentrum des
   Dreiecks A(5, 6), B(7, 4), C(-1, 6) ist.
c) Ist das Dreieck A(-11, 4), B(0, -7), C(4, 8) gleichseitig?
d) Zwei Kreise sind gegeben. Der erste habe das Zentrum U(7, -3) und den Radius R = 7, der
   zweite das Zentrum V(-2, 5) und den Radius r = 5. Es ist zu entscheiden, ob sich die Kreise
   schneiden, berühren oder meiden.

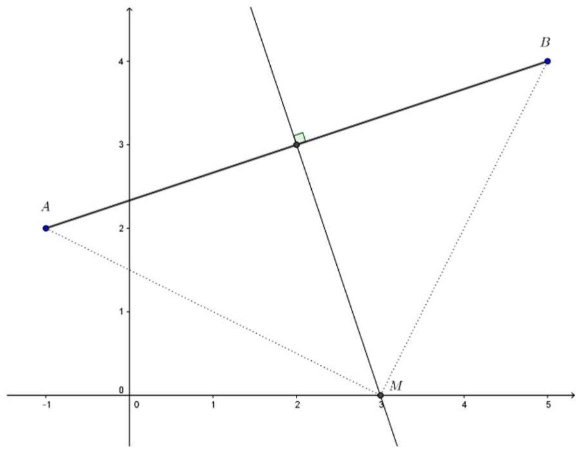
Lösungen:
a) $a = 6,\ b = \sqrt{26},\ c = \sqrt{2},\ \approx 12.5$
b) $r = |\overline{MA}| = |\overline{MB}| = |\overline{MC}| = \sqrt{34}$
c) die Seiten sind nicht gleich lang
d) $\overline{UV} = \sqrt{145} > r + R = 12$ die Kreise meiden sich.

Bei Abstandsproblemen betrachtet man oft statt des Abstands, das Quadrat des Abstands. Wurzeln können so vermieden werden.

Aufgabe:
Welcher Kreis mit Mittelpunkt M auf der x-Achse geht durch die Punkte A(-1, 2) und B(5, 4)?

Geometrische Lösung:
Der Mittelpunkt M des Kreises liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB.

Analytische Lösung:
Ansatz für die Koordinaten des gesuchten Punktes: M(x, 0)



M hat von A und B den gleichen Abstand bzw. das gleiche Abstandsquadrat.

$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2$
$(x+1)^2 + 2^2 = (x-5)^2 + 4^2$
$x^2 + 2x + 1 + 4 = x^2 - 10x + 25 + 16$
führt auf die Lösung x = 3.
Der gesuchte Kreis hat den Mittelpunkt M(3, 0) und den Radius
$r = \overline{MA} = \overline{MB} = \sqrt{20}$

Aufgabe:
Welche Koordinaten hat der Umkreismittelpunkt M im Dreieck A(3, 6), B(4, 1), C(-1, 0)?

Ansatz für die Koordinaten des Umkreismittelpunkts: M(x, y):

Abstandsquadrate von MA, MB und MC stimmen überein:
$(x-3)^2 + (y-6)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2$
$(x-3)^2 + (y-6)^2 = (x+1)^2 + y^2$
Vereinfachen ergibt
$2x - 10y = -28 \qquad 2x = 10y - 28 \qquad (1)$
$8x + 12y = 44 \qquad 2x = 11 - 3y \qquad (2)$
Da die linken Seiten übereinstimmen, gilt dies auch für die rechten:
$10y - 28 = 11 - 3y \quad y = 3$ und mit 1) $x = 1$
Der gesuchte Umkreismittelpunkt hat die Koordinaten M(1, 3)

Bemerkungen:
Im Abschnitt 1.6 wird sich zeigen, dass es sich bei den Gleichungen (1) und (2) um die Gleichungen der Mittelsenkrechten der Strecken AB bzw. AC handelt. Die Gleichungen (1) und (2) bilden ein sogenanntes Gleichungssystem (→“Lineare Gleichungssysteme“).