

Lineare Gleichungssysteme

1. Gleichungslehre

Aufgabe:

Es sind alle Lösungen der Gleichung $2x \cdot (3x + 4) \cdot (2x - 1) = 0$ zu bestimmen.

Bemerkung:

Ausmultiplizieren ist nicht zu empfehlen.

$$\begin{array}{ll} 2x = 0 & x_1 = 0 \\ 3x + 4 = 0 & x_2 = -\frac{4}{3} \\ 2x - 1 = 0 & x_3 = \frac{1}{2} \end{array}$$

Satz 1:

Ein Produkt reeller Zahlen ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Beispiele:

$$\begin{array}{lll} x^2 = 9 & (x + 3) \cdot (x - 3) = 0 & x_1 = 3, x_2 = -3 \\ x^2 = 5 & (x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5}) = 0 & x_{1,2} = \pm\sqrt{5} \end{array}$$

Anmerkung:

Die beiden folgenden Fragestellungen sind zu unterscheiden:

a)

Welche Lösungen hat die Gleichung $x^2 = 9$?

Antwort: $x = \sqrt{9} = 3$ und $x = -\sqrt{9} = -3$

b)

Was bedeutet $\sqrt{9}$?

Antwort: nur +3 (und nicht auch -3).

Es ist $\sqrt{(-3)^2} = 3$ oder allgemein:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\left(9 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 0 \quad \left(9 - \frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 0 \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}$$

$$x^2 + 4x = 0 \quad x(x + 4) = 0 \quad x_1 = 0, x_2 = -4$$

$$x^2 = 4x \quad x^2 - 4x = x \cdot (x - 4) = 0 \quad x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$x^3 - 9x = 0 \quad x^3 - 9x = x \cdot (x^2 - 9) = x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) = 0 \quad x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$$

$$x^3 + 9x = 0 \quad x \cdot (x^2 + 9) = 0 \quad x_1 = 0$$

Wegen $(x^2 + 9) \geq 9$ liefert der zweite Faktor keine weiteren reellen Lösungen.

Übungsaufgabe:

Wie heißen die reellen Lösungen der Gleichung

$$(x^2 - 7) \cdot (x^2 + 25) \cdot (x^2 + x - 12) = 0$$

Lösung: $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}, x_3 = -4, x_4 = 3$

In den folgenden Fällen können die Lösungen durch Faktorisieren gefunden werden:

$x^2 - 3x + 2 = 0$	$(x - 1) \cdot (x - 2) = 0$	$x_1 = 1, x_2 = 2$
$x^2 = -5x - 6$	$(x + 2) \cdot (x + 3) = 0$	$x_1 = -2, x_2 = -3$
$x \cdot (x - 4) = 12$	$(x + 2) \cdot (x - 6) = 0$	$x_1 = -2, x_2 = 6$
$2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$	$2x \cdot (x + 3) \cdot (x - 2) = 0$	$x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 0$
$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$	$(x^2 - 9) \cdot (x^2 + 1) = 0$	$x_1 = 3, x_2 = -3$

Übungsaufgabe:

Gesucht ist eine Gleichung mit den Lösungen $0, 1, -\frac{1}{2}$ und 3 .

Lösung: $x \cdot (x - 1) \cdot (2x - 1) \cdot (x - 2) = 0$.

Aufgabe: Welche Lösung hat die folgende Gleichung:

$$\begin{array}{rcl}
 x + \frac{1}{2} - \frac{2x}{3} = 3 - \frac{x}{2} & | \cdot 6 & \\
 6x + 3 - 4x = 18 - 3x & | \text{ordnen} & \\
 2x + 3 = 18 - 3x & | + 3x - 3 & \\
 5x = 15 & | \cdot \frac{1}{5} & \\
 x = 3 & &
 \end{array}$$

Probe durch Einsetzen in die erste Gleichung

Satz 2:

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl (denselben Term) addiert oder subtrahiert
- beide Seiten mit der gleichen, **von 0 verschiedenen Zahl** multipliziert
- beide Seiten durch die gleiche, **von 0 verschiedene Zahl** dividiert.

Umformungen, welche die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändern, heissen **Äquivalenzumformungen**.

Beispiele:

$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 0$	$4x = 0$	Lösung: $x = 0$
$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$	$0 \cdot x = 0$	allgemein gültig
$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x + 6$	$0 \cdot x = 6$	keine Lösung

Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit einem Term, der die Variable enthält, so können - wie die folgenden Beispiele zeigen - Scheinlösungen auftreten. In diesem Fall ist eine Probe zu machen.

Beispiele:

a)

$$\frac{x-1}{x-1} - x = 0$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(x-1)$, so erhält man die Gleichung $x-1-x \cdot (x-1) = 0$ oder vereinfacht

$$x-1+x^2+x = -(x^2-2x+1) = -(x-1)^2 = 0 \text{ mit der Scheinlösung } x = 1.$$

Die Gleichung hat also keine Lösungen oder anders ausgedrückt ist $L = \{\}$.

Variante:

Für $x \neq 1$ kann der Bruch gekürzt werden. Dies führt auf die Gleichung $1-x = 0$ oder $x = 1$. Somit hat die ursprüngliche Gleichung keine Lösung.

b)

$$\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5x-10}{x-3} \quad | \cdot (x-3)$$

$$2x-1 = 5x-10$$

$x = 3$ ist eine Scheinlösung (der Nenner verschwindet für $x = 3$)

Die Gleichung hat keine Lösung, die Lösungsmenge ist $L = \{\}$.

Dividiert man eine Gleichung durch einen Term, der die Unbekannte enthält, so gehen in der Regel Lösungen verloren.

Beispiele:

a)

$$x^2 = 3x$$

Die Gleichung hat wegen $x \cdot (x-3) = 0$ die Lösungen $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 3$.

Dividiert man auf beiden Seiten durch x , dann geht die Lösung $x = 0$ verloren.

b)

Was stimmt hier nicht?

$$2 = 1?$$

Offensichtlich ist

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$

umgeformt

$$(a+a) \cdot (a-a) = a \cdot (a-a)$$

Division durch $(a-a)$

$$2a = a$$

also gilt

$$2 = 1?$$

Antwort: Bei der Division wird durch 0 dividiert.

Quadriert man beide Seiten einer Gleichung, können ebenfalls Scheinlösungen auftreten.

Beispiele:

a)

$$\begin{array}{llll} \sqrt{5+x} = \sqrt{2x+11} & \text{quadrieren} & & \\ 5+x = 2x+11 & x = -6 & \text{Probe!} & L = \{\}. \end{array}$$

Als Lösungen kommen nur reelle Zahlen $x \geq -5$ in Frage (die Wurzel aus einer negativen reellen Zahl ist nicht definiert).

b)

$$\sqrt{5+2x} = \sqrt{x+4} \quad x = -1 \quad \text{Die Probe stimmt!}$$