

## 8. Der Gauss-Algorithmus (GA)

Die Theorie der linearen Gleichungssysteme ist an der Hochschule ein Teilgebiet in der sogenannten linearen Algebra. In der Praxis stellt sich das Problem, Systeme mit sehr vielen Unbekannten z.B. tausend Unbekannten zu lösen, was nur mit Computern möglich ist. Gesucht sind effiziente Rechenverfahren (Algorithmen) bei Systemen mit z.B. tausend Unbekannten. Sie basieren auf den bisher besprochenen Verfahren.

Beim Gaußalgorithmus wird ein Gleichungssystem in ein gestaffeltes Gleichungssystem übergeführt. Die Lösungen können anschliessend durch Rückwärtseinsetzen bestimmt werden.

Anstelle des Gleichungssystems werden in einer Liste, einer sogenannten Matrix die Koeffizienten der Unbekannten und in der letzten Spalte zusätzlich die Konstanten festgehalten.

Spezialfall: gestaffeltes Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 2x+y+z = 1 \\ -y+z = -1 \\ 5z = 5 \end{array} \right| \quad \text{zugehörige Matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich unmittelbar  $z = 1$ .

Mit Rückwärtseinsetzen erhält man zunächst aus der 2. Gleichung  $y = 2$  und schliesslich mit der 1. Gleichung  $x = -1$

$$L = \{(1, 2, -1)\}$$

Im Beispiel hat die zugehörige Matrix bereits Dreiecksgestalt (die Koeffizienten unterhalb der Diagonalen sind 0).

Ist dies nicht der Fall, dann kann dies durch Zeilenumformungen erreicht werden, indem man geeignete Vielfache einer Zeile zu den folgenden Zeilen addiert.

Dazu ein Beispiel:

$$\left| \begin{array}{l} 2x+y+z = 1 \\ 4x+y+3z = 1 \\ -2x+2y+z = 7 \end{array} \right| \quad \text{zugehörige Matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Zunächst wird die 1. Zeile zur 3. addiert und das (-2)-fache der 1. Gleichung zur 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Addiert man in der 2. Matrix das 3-fache der 2. Zeile zur 3., dann hat die Matrix bereits Diagonalgestalt.

Aus der letzten Zeile ergibt sich  $z = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -1$

Das Rückwärtseinsetzen kann vermieden werden, wenn die Matrix auf Diagonalform gebracht werden kann.

Dazu wird etwa das (-1)-fache der 3. Zeile zur 2. und 1. Zeile addiert. In der neuen Matrix wird anschliessend die 2. Zeile zur 1. addiert.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wird noch jede Zeile durch das Diagonalelement dividiert, so können die Lösung in der letzten Spalte direkt abgelesen werden.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -1, y = 2, z = 1$$

Nähere Angaben sind zu finden unter

[http://mathekurs.ch/pdf/weitere\\_Themen/Lineare](http://mathekurs.ch/pdf/weitere_Themen/Lineare) → Algebra/LGS\_GA.pdf

## 9. Eine Anwendung: Der Computertomograph

Leitprogramm ETH: Lineare Gleichungssysteme

[http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/lin\\_gleich/lingl.pdf](http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/lin_gleich/lingl.pdf)