## 7. Textaufgaben

Ein mögliches Vorgehen bei Textaufgaben:

1. Text genau lesen
2. Bei einem Beispiel mit vorgegebenen Zahlen Zusammenhänge herauszufinden versuchen.
   Die vorgegebenen Zahlen durch Variable ersetzen
3. Gleichungssystem lösen
5. Welche Lösungen sind sinnvoll?
6. Lösung als Text formulieren

Beispiele:
1)
Dividiert man eine zweistellige natürliche Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man 6 Rest 5. Dividiert man aber ihre Spiegelzahl durch die Quersumme, so erhält man 4, Rest 3. Wie heisst die Zahl?

$34 = 3 \cdot 10 + 4$, Quersumme $3 + 4$
$(34 = 3 \cdot 10 + 4) : (3 + 4) = 4$ Rest 6 bedeutet $34 = 4 \cdot 7 + 6$

Zahl "ze" bedeutet z Zehner und e Einer
Gesuchte Zahl: $10z + e$  Quersumme $z + e$  Spiegelzahl: $10e + z$

Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ll} 10z + e & = 6 \cdot (z + e) + 5 \\ 10e + z & = 4 \cdot (z + e) + 3 \end{array} \right|$$

oder vereinfacht

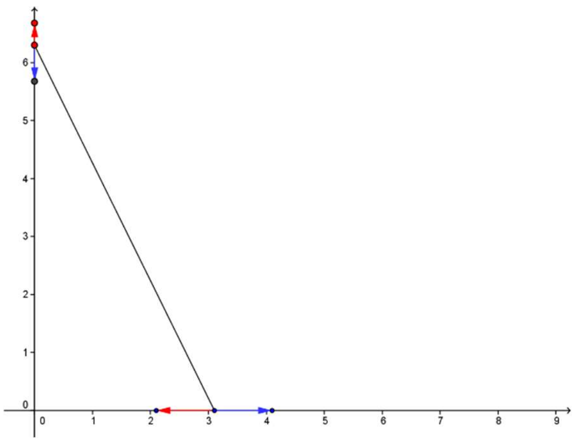
$$\left| \begin{array}{l} 4z - 5e = 5 \\ -3z + 6e = 3 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 4z - 5e = 5 \\ -z + 2e = 1 \end{array} \right|$$

Lösung $e = 3$, $z = 5$  Die gesuchte Zahl ist 53.

2)
Eine Leiter ist an eine vertikale Wand gestellt. Schiebt man ihren Fuss auf horizontalem Boden um 1 m gegen die Wand zu, so rutscht das andere Ende der Leiter 0.4 m nach oben. Verschiebt man aber die Leiter 1 m in die andere Richtung von der Wand weg, so reicht das andere Ende 0.6 m weniger weit hinauf. Welche Länge hat die Leiter?

Vergleiche die Quadrate der Leiterlänge *l*. Die ursprüngliche Lage ist durch die x- bzw. y-Achsenabschnitte festgelegt. Nach Pythagoras gilt für das Quadrat der Leiterlänge *l*:

$$\left| \begin{array}{ll} x^2 + y^2 & = (x-1)^2 + (y+0.4)^2 \\ x^2 + y^2 & = (x+1)^2 + (y-0.6)^2 \end{array} \right|$$



$$\left| \begin{array}{ll} 2x - 0.8y & = 1.16 \\ -2x + 1.2y & = 1.36 \end{array} \right|$$

x = 3.1  y = 6.3

Die Leiter ist anfänglich x = 3.1 m von der Wand entfernt, und das obere Leiterende y = 6.3 m vom Boden. Die Leiterlänge beträgt $l \approx 7.02$ m

3)
Silvia und Lukas fahren mit dem Rad auf einer 400 m langen Rennbahn mit praktisch konstanten Geschwindigkeiten. Silvia startet 2 Sekunden nach Lukas und holt ihn 8 Sekunden später zum ersten Mal ein und 200 Sekunden später zum zweiten Mal. Wie schnell fahren die beiden?

Zwischen dem zurückgelegten Weg s (in m), der benötigten Zeit  (in s) und der Geschwindigkeit v (in m/s) besteht die Beziehung $s = vt$

$v_S$ : Geschwindigkeit der schnelleren Radfahrerin Silvia
$v_L$: Geschwindigkeit der langsameren Radfahrers Lukas

Beim ersten Einholen haben die beiden Fahrer denselben Weg zurückgelegt, beim zweiten unterscheiden sich die zurückgelegten Wege um eine Runde:

$$\left| \begin{array}{r} 8v_S = 10v_L \\ 200v_S = 200v_L + 400 \end{array} \right|$$ bzw. nach Division durch 2 bzw. 200: $$\left| \begin{array}{l} 4v_S = 5v_L \\ v_S = v_L + 2 \end{array} \right|$$

Geschwindigkeiten der Radfahrer: Lukas 8 m/s bzw. Silvia 10 m/s.

Lösung ohne ein Gleichungssystem:
Aus der ersten Information folgt, dass das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ beträgt.
Silvia hat also eine um einen Viertel grössere Geschwindigkeit als Lukas. Dank dieser grösseren Geschwindigkeit legt sie in 200 Sekunden eine Strecke von 400 m zurück, sie hat also eine um 2m/s grössere Geschwindigkeit als Lukas, was einem Viertel der Geschwindigkeit von Lukas entspricht.

4)
Aus einem Motorboot, das mit konstanter Geschwindigkeit auf einem gleichmässig fliessenden Strom flussaufwärts fährt, fällt ein Ball ins Wasser. 90 Minuten später, als dies bemerkt wird, kehrt das Boot um und fährt nun mit gleich grosser, aber entgegengesetzter Geschwindigkeit relativ zum Wasser flussabwärts (die Zeit für das Abbremsen bzw. des Beschleunigens kann vernachlässig t werden) bis der Ball erreicht wird und aufgefischt werden kann. Wie viele Minuten lag der Ball insgesamt im Wasser?

Lösung:
Geschwindigkeit des Motorboots $v_M$ $[m/min]$
Geschwindigkeit des Wassers bzw. des Balls $v_W$ $[m/min]$

Weg des Balls:
$s_W = t \cdot v_W$
Weg des Motorboots:
$s_M = 90 \cdot (v_M - v_W) + (t - 90) \cdot (v_M + v_W)$
$\quad = t \cdot (v_M + v_W) - 180 \cdot v_W$
Subtrahiert man vom Weg des Motorboots den Weg des Balls, so erhält man gerade den doppelten Weg des Motorboots flussaufwärts:
$s_M - s_W = t \cdot (v_M + v_W) - 180 \cdot v_W - t \cdot v_W = 2 \cdot 90 \cdot (v_M - v_W)$
vereinfacht zu
$t \cdot v_W = 180 \cdot v_M$
und damit
$t = 180$ $[min]$
Das Resultat ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Motorbootes und des Wassers.

Interpretation:
Wählt man als Bezugssystem den Fluss, so bleibt der Ball in Ruhe und das Boot braucht flussaufwärts und –abwärts je 90 Minuten.

5.
Eine Rolltreppe bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit abwärts. Dabei bleiben stets n Stufen sichtbar. A und Z steigen gleichzeitig diese Rolltreppe hinunter, wobei A in derselben Zeit doppelt so viele Stufen als Z zurücklegt. A kommt unten an, nachdem er 27 Stufen gegangen ist, während Z unten ankommt, nachdem er 18 Stufen gegangen ist. Wie gross ist n?

A legt 27 Stufen in der Zeit $t_A$ [s] zurück, hat also die Geschwindigkeit $v_A = \frac{27}{t_A}$ [Stufen/s]
Z legt 18 Stufen in der Zeit $t_Z$ [s] zurück, hat also die Geschwindigkeit $v_Z = \frac{18}{t_Z}$ [Stufen/s]
Da die Geschwindigkeit von A doppelt so gross wie die von Z ist gilt wegen $\frac{v_A}{2} = v_Z$
$\frac{27}{2t_A} = \frac{18}{t_Z}$ oder $t_Z = \frac{4}{3} t_A$ (*)

Der zurückgelegte Weg in Stufen setzt sich aus dem Weg der Rolltreppe und dem Weg von A bzw. Z zusammen. Bezeichnet man die Geschwindigkeit der Rolltreppe mit $v_R$ dann gilt:
für A: $\qquad t_A \cdot v_R + 27 = n$
für B: $t_Z \cdot v_R + 18 = n$ oder wegen (*) $\qquad \frac{4}{3} t_A \cdot v_R + 18 = n$
Multipliziert man die erste Gleichung mit $-\frac{4}{3}$ und addiert sie zur zweiten, so erhält man
$-18 = -\frac{n}{3}$ oder n = 54.

Kontrolle:
Ist A unten angekommen, dann hat er 27 + 27 = 54 Stufen zurückgelegt. Der halb so schnelle Z hat erst 27 + 13.5 = 40.5 Stufen zurückgelegt. Er hat in diesem Moment also $\frac{13.5}{18} = \frac{3}{4}$ seines Wegs zurückgelegt. Tatsächlich $\frac{3}{4}$ von 54 ist 40.5.

6.
Eine 349 Meter lange Brücke wird von einem Zug in 25 Sekunden überquert (von der Auffahrt der Lokomotive bis zum Verlassen des letzten Wagens). An einem Fussgänger, welcher (verbotenerweise) entgegen der Fahrrichtung marschiert, fährt der gleiche Zug in 8 Sekunden vorbei. Der Fussgänger legt in dieser Zeit 8 Meter zurück. Welche Länge hat der Zug und mit welcher Geschwindigkeit fährt er?

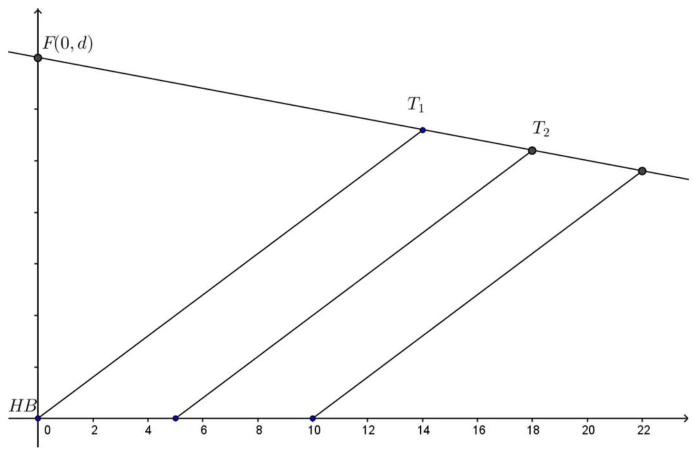
Die Geschwindigkeit des Fussgängers ist $v_F = 1\ [\frac{m}{s}]$
Der Zug habe die Länge $l\ [m]$ und die Geschwindigkeit $v_Z\ [\frac{m}{s}]$
Der Zug legt bei der Fahrt über die Brücke die Strecke $340 + l$ zurück:
$349 + l = 25v_Z$
Beim Kreuzen des Fussgängers sind der Weg des Zuges und der des Fussgängers gerade gleich der Zuglänge
$l = 8v_Z + 8$
Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} l = 25v_Z - 349 \\ l = 8v_Z + 8 \end{array} \right|$$

hat die Lösung $v_Z = 21$ und $l = 176$.
Der Zug mit einer Länge 176 Meter fährt mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s.

Lösungsvariante:
Der Zug bewegt sich relativ zum Fussgänger mit der Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit $v = v_Z + v_F$, wobei $v_Z = \frac{349+l}{25}$ und $v_F = 1$.
In diesem System legt der Zug in 8 Sekunden die Strecke $l = v \cdot t = \left(\frac{349}{25} + 1\right) \cdot 8$ zurück.
Löst man diese Gleichung nach $l$ auf so erhält man die Zugslänge $l = 176$.

7.
Vom Hauptbahnhof einer Stadt schickt eine Strassenbahn alle 5 Minuten einen Triebwagen Richtung Flughafen. Gleichzeitig mit dem ersten Tram um 6 Uhr morgens rennt eine Sportlerin vom Flughafen her gegen den Bahnhof. Sie trifft das erste Tram um 6:14 Uhr und jedes folgende nach 4 Minuten.
In welchem Verhältnis stehen die mittleren Geschwindigkeiten des Trams $v_T\,[\frac{km}{h}]$ und der Sportlerin $v_S\,[\frac{km}{h}]$?




In der Abbildung ist der grafischen Fahrplan des Trams und der Sportlerin dargestellt.
d [km] bezeichne die Distanz zwischen dem Hauptbahnhof HB und Flughafen F.
Die Wege des Triebwagens und des Sportlers ergeben zusammen die Distanz d.
Für den ersten Treffpunkt gilt:

$$\frac{14}{60}v_T + \frac{14}{60}v_S = d$$

Für den zweiten Treffpunkt gilt: $\frac{13}{60}v_T + \frac{18}{60}v_S = d$

Subtrahiert man die 2. Gleichung von der ersten, dann ergibt sich $v_T = 4v_S$

Beispiel:
Fährt das Tram mit einer mittleren Geschwindigkeit von 48 km/h, dann rennt die Sportlerin mit einer Geschwindigkeit von 12 km/h. Die Distanz zwischen Flughafen und Hauptbahnhof beträgt in diesem Fall 14 km.