3. Rechnerische Lösungsverfahren

Bei den rechnerischen Verfahren führt man das Problem auf die Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten zurück, indem man eine der beiden Unbekannten eliminiert. Dies kann mit dem Einsetzungs- oder mit dem Additionsverfahren geschehen.

Einsetzungsverfahren (Substitutionsmethode)

Eine der beiden Gleichungen wird nach einer Variablen aufgelöst und der gefundene Term in die zweite Gleichung eingesetzt.

Beispiele:
a)
$$\begin{array}{r|rl|} 1) & x-y & =3 \\ 2) & 2x+3y & =11 \end{array}$$

Man löst z.B. die 1. Gleichung nach y auf und setzt den Term in die 2. Gleichung ein:
3) $y = x-3$ eingesetzt in (2).
$2x+3\cdot(x-3)=11$
Diese Gleichung hat die Lösung x = 4. Einsetzen in 3) ergibt schliesslich y = 1.
Probe mit der zweiten Gleichung!
Lösungsmenge $L = \{(4,1)\}$

b)
$$\begin{array}{r|rl|} 1) & 2x+3y & =5 \\ 2) & 2x-y & =-5 \end{array}$$

Man löst z.B. die 2. Gleichung nach y auf und setzt den Term in die 1. Gleichung ein:
3) $y = 2x+5$ eingesetzt in (1) ergibt die Lösung $x = -\frac{5}{4}$ und $y = \frac{5}{2}$.
oder als Lösungsmenge $L = \left\{\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right)\right\}$

Nachteil dieser beliebten Methode**:**
Löst man eine der Gleichungen nach x oder y auf, dann können rationale Zahlen als Koeffizienten auftreten, was die Rechnung erschwert.

Das Additionsverfahren

Jede der beiden Gleichungen wird mit einem geeigneten Faktor so multipliziert, dass die Koeffizienten einer Unbekannten entgegengesetzt gleich werden. Werden die beiden Seiten der neuen Gleichungen addiert, so ergibt sich eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Beispiele:
a)

$$\begin{array}{r|l|} 1) & 2x - y \quad = 7 \\ 2) & 2x + y = 13 \end{array}$$

Addition der beiden Seiten ergibt
4x = 20 oder x = 5.
Multipliziert man die 1. Gleichung mit (-1) erhält man das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{ll} -2x + y & = -7 \\ 2x + y & = 13 \end{array}\right|$$ oder nach Addition der beiden Seiten y = 3.

Variante:
Der y-Wert kann auch durch Einsetzen in eine der Gleichung 1) oder 2) bestimmt werden.
Das Gleichungssystem hat damit die Lösungsmenge $L = \{(5,3)\}$.
b)

$$\begin{array}{r|l|l|l} 1) & 14x - 20y \quad = 7 & & \cdot(-2) \\ 2) & \quad 7x - 8y = 1 & \cdot(-2) & \cdot 5 \end{array}$$

Multiplikation der 2. Gleichung mit (-2)

$$\begin{array}{r|l|} 1) & 14x \ \ -20y \quad = 7 \\ 2) & -14x + 16y = -2 \end{array}$$

Addition der beiden Gleichungen

$-4y = 5$ oder $y = -\frac{5}{4}$.
Zur Bestimmung von x multipliziert man 1) mit (-2) und 2) mit 5 und addiert die beiden Gleichungen mit dem Ergebnis $x = -\frac{9}{7}$.
Das Gleichungssystem hat die Lösungsmenge $L = \left\{\left(-\frac{9}{7}, -\frac{5}{4}\right)\right\}$

Das folgende Beispiel wird zunächst auf die Normalform gebracht:
c)

$$\left|\begin{array}{l} \frac{4x-1}{5} - x = y - \frac{3y-4}{2} \\ \frac{x-2}{2} + y = \frac{5y-9}{7} + x \end{array}\right|$$

Multipliziere die 1. Gleichung mit 10 und die 2. mit 14

$$\left|\begin{array}{l} -2x + 5y = 22 \\ -7x + 4y = -4 \end{array}\right|$$

Lösungsmenge $L = \{(4, 6)\}$

Übungsaufgabe:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x+y}{2} + \frac{4y}{3} = 10 \\ 5 - x = \frac{x+y}{2} \end{array}\right|$$

Lösungsmenge $L = \{(-35, 15)\}$