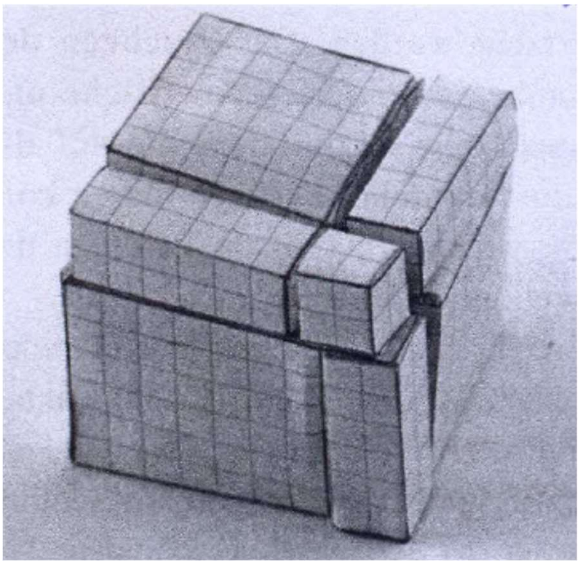
4. Der Binomische Lehrsatz:

Einführendes Beispiel in einem Spezialfall:

Der Würfel mit der Kantenlänge $x + 1$ hat das Volumen $(x + 1\,)^3$. Er ist zusammengesetzt aus
- einem Würfel der Kantenlänge x mit dem Volumen x^3
- drei Quadern mit dem Volumen $3x \cdot x \cdot 1 = 3x^2$=3
- drei Quadern mit dem Volumen $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x = 3x$
- und einem Würfel der Kantenlänge 1.



Damit gilt:
$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Der binomische Lehrsatz macht eine Aussage über die Entwicklung von
$(a\ +\ b)^n$ n = 0,1, ...

Durch Ausmultiplizieren für verschiedene n erhält man:

$(a\ +\ b)^0$ 1
$(a\ +\ b)^1$ $a + b$
$(a\ +\ b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2$
$(a\ +\ b)^3$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a\ +\ b)^4$ $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

- Die Entwicklung von $(a + b)^n$ hat $n + 1$ Summanden
  In jedem Summanden ist die Summe der Exponenten gleich n
- Die Koeffizienten lassen sich im sogenannten Pascal'schen Dreieck (Blaise Pascal 1623 - 1662) anordnen. Das Schema wird von lauter Einsen berandet. Ein Koeffizient im Innern des Schemas ergibt sich als Summe der unmittelbar darüber liegenden Zahlen

n = 0						1					
n = 1					1		1				
n = 2				1		2		1			
n = 3			1		3		3		1		
n = 4		1		4		6		4		1	
n = 5	1		5		10		**10**		5		1

Der fett gedruckte Koeffizient ist die Summe der darüber liegenden Zahlen 6 und 4.

Im Kapitel Kombinatorik wird später gezeigt, dass die Zahlen des Pascalschen Dreiecks, die sogenannten Binomialkoeffizienten, auch direkt berechnet werden können. So kann z.B. der fett dargestellte Koeffizient folgendermassen berechnet werden:

$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ im Zähler und Nenner stehen gleich viele Faktoren

Die Anzahl der Tipmöglichkeiten beim Zahlenlotto „6 aus 45" kann analog berechnet werden:

$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8'145'060$ Möglichkeiten

Beispiele zum Binomischen Lehrsatz:

a)

$(\sqrt{2}+1)^3 = 5 + 7\sqrt{2}$

b)

$(2-\sqrt{3})^3 = 26 - 15\sqrt{3}$

c)

Ein Näherungswert für 1.008^4

$1.008^4 = (1 + 0.008)^4 \approx 1 + 4 \cdot 0.008 = 1.032$ exakt: 1.032386052

d)

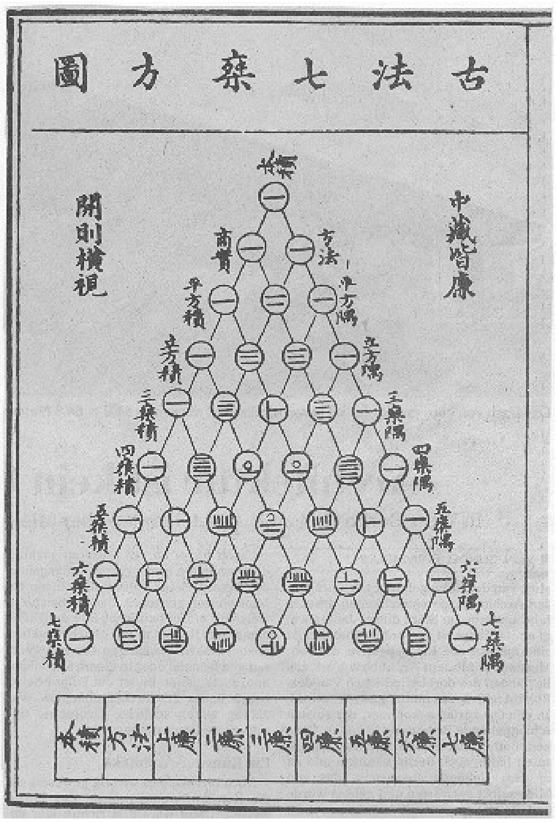
aus der Physik

$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ Längenausdehnung eines Stabs

$V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)^3 \approx V_0 \cdot (1 + 3\alpha \cdot \Delta T)$ Volumenausdehnung eines Würfels

Es werden nur die beiden ersten Glieder berücksichtigt, höhere Potenzen von „kleinen" Zahlen werden vernachlässigt.

Die Binomialkoeffizienten sind bereits in einer chinesischen Darstellung von 1303 zu finden und dürften in China bereits um 1100 bekannt gewesen sein. Im Westen sind sie um 1527 bei Apianus aufgetaucht und von Blaise Pascal um 1665 bekannt gemacht worden. Das Schema heisst deshalb Pascalsches Dreieck.



Übungsaufgaben:

a) $(x-2y)^3 = ?$

b) $(x^2+2x)^3 = ?$

c) $(x^3-1)^3 = ?$

Lösungen:

a) Tipp: -2y durch b ersetzen

$x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

b) x^2 durch a und 2x durch b ersetzen

$x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3$

c) $x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1$