03 Beispiele zur Mitternachtsformel

a)
$4x^2 = 17x - 15$ auf die Normalform bringen
$4x^2 - 17x + 15 = 0$ $a = 4 \quad b = -17 \quad c = 15$
$D = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 49$

Lösungen: $x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4}$ $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 3$
Die Lösungen können durch Einsetzen überprüft werden.

b)
$-2x^2 = 3 - 7x$ mit (-1) multiplizieren und ordnen
$2x^2 + 7x + 3 = 0$ $D = 25$
Lösungen: $x_1 = -\frac{5}{4} \quad x_2 = -3$

c)
$y^2 + 6y + 4 = 0$ D = 20
Lösungen: $y_1 = -3 - \sqrt{5} \quad y_2 = -3 + \sqrt{5}$

d)
$x^2 + 8x + 16 = 0$ $D = 0$
Lösung: $x_{1,2} = 4$

Lösungsvariante: ausklammern.

e)
$x^2 + 2x + 8 = 0$ $D = -28 < 0$
keine reelle Lösung

f)
$0.235x^2 + 1.41x - 3.14 = 0$ $D \approx 4.94 \; x_1 \approx 1.73 \quad x_2 \approx -7.73$

In den beiden folgenden Beispielen ist das Anwenden der Auflösungsformel nicht empfehlenswert.

g)
$x^2 - 25 = 0$ $D = 100$
Lösungen $x_1 = 5 \quad x_2 = -5$
Lösungsvariante: zerlegen: $(x - 5) \cdot (x + 5) = 0$

h)
$2x^2 = 7x$
Dividiert man durch x, so geht die Lösung $x = 0$ verloren.

Korrektes Vorgehen:
$2x^2 - 7x = 0$ $D = 49$
Lösungen: $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{7}{2}$
Lösungsvariante: faktorisieren $x \cdot (2x - 7) = 0$

i)
$\frac{3x-4}{x-4} = 9 - \frac{x-2}{2}$
Mit dem Hauptnenner multiplizieren ($x \neq 4$) und vereinfachen
$x^2 - 18x + 72 = (x-6)\cdot(x-12) = 0$ $\qquad D = 36$
Lösungen: $\qquad x_1 = 6 \qquad x_2 = 12$

Ein Beispiel mit einem Parameter

$x^2 + q \cdot x - 2q^2 = 0$ $\qquad a = 1 \qquad b = q \qquad c = -2q^2$
$D = 9q^2$
Lösungen: $\qquad x_1 = -2q \qquad x_2 = q$

Variante: Ausklammern $\qquad (x+2q)\cdot(x-q) = 0$

Ein schwierigeres Beispiel:
$\frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} = 3x - 1$ $\qquad x \neq 2, x \neq -2$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Hauptnenner $x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$ so erhält man eine Gleichung 3. Grades, die aber in Faktoren zerlegt werden kann:
$3x^3 - x^2 - 10x = x \cdot (3x^2 - x - 10) = 0$
Lösungen: $\qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{5}{3} \qquad (x_3 = 2)$

Nur x_1 und x_3 sind Lösungen der Ausgangsgleichung, x_2 ist durch die Multiplikation mit $x^2 - 4$ hinzugekommen.

Lösungsvariante: linke Seite vereinfachen.
$$\frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} = \frac{8}{x^2-4} - \frac{2\cdot(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4-2x}{x^2-4} = \frac{2(2-x)}{(x-2)(x+2)} = -\frac{2}{x+2}$$
Die Gleichung lautet damit
$-\frac{2}{x+2} = 3x - 1$

oder nach Multiplikation mit dem Nenner
$(1-3x)\,(x+2) = 2$
Da rechts nicht 0 steht, wird man ausmultiplizieren

$3x^2 + 5x = x(3x+5) = 0$
Lösungen: $\qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{5}{3}$

In einfachen Fällen gelingt das Faktorisieren auch bei Gleichungen der Form

$x^2 + px + q = 0$

Beispiele:
a)
$x^2 - 7x + 12 = 0$ $\qquad (x-4)\cdot(x-3) = 0$ $\qquad x_1 = 4$ $\quad x_2 = 3$
Es ist die folgende Sprechweise gebräuchlich:
Der quadratische Term kann in die Linearfaktoren $(x-4)$ und $(x-3)$ zerlegt werden.
b)
$x^2 + 5x + 6 = 0$ $\qquad (x+2)\cdot(x+3) = 0$ $\qquad x_1 = -2$ $\quad x_2 = -3$
c)
$x^2 - x - 6 = 0$ $\qquad (x+2)\cdot(x-3) = 0$ $\qquad x_1 = -2$ $\quad x_2 = 3$
d)
$x^2 + x - 12 = 0$ $\qquad (x+4)\cdot(x-3) = 0$ $\qquad x_1 = -4$ $\quad x_2 = 3$

Bestimmung der Lösungen in den 3 Fällen mit Excel

Quadratische Auflösungsformel					
Version 1					
a		b		c	
0.235	x^2 +	1.41	x +	-3.14	= 0
D =	4.9397				
2 Lösungen	x1 = 1.732				
	x2 = -7.732				
a		b		c	
1	x^2 +	1	x +	1	= 0
D =	-3				
keine Lösung					
a		b		c	
1	x^2 +	-2	x +	1	= 0
D =	0				
1 Lösung	x = 1.00				(ac)