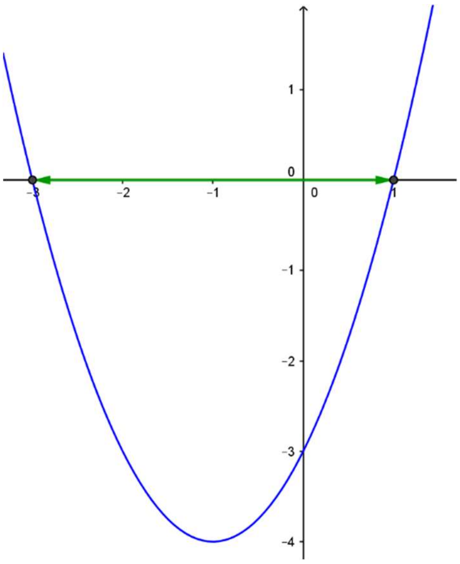
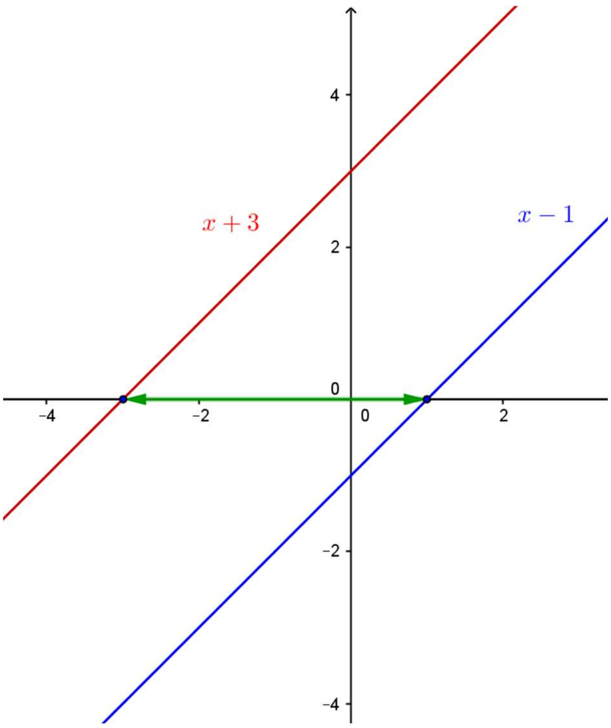
10 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen können gelöst werden, indem man die zugehörige quadratische Funktion betrachtet. Die Lösungsmenge ergibt sich dann, indem man die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse bestimmt und die Öffnung der Parabel berücksichtigt.

Illustration an Beispielen:



a) $x^2 + 2x - 3 < 0$
Der Graph der zugehörigen quadratischen Funktion
$f: x \rightarrow y = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$
ist eine nach oben geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ schneidet. Die Parabel verläuft im Intervall $]-3, 1[$ unterhalb der x-Achse, das heisst dort gilt $f(x) < 0$.
Die Ungleichung hat die Lösungsmenge $L =]-3, 1[$.



Lösungsvariante:
Die Lösungsmenge L kann auch mit einer Fallunterscheidung gelöst werden. L besteht aus den reellen Zahlen für die einer der Faktoren negativ und der andere positiv ist.
Zu Lösungsmenge gehören die x-Werte, für die $x + 3$ und $x - 1$ verschiedene Vorzeichen haben. Dies ist im Intervall $L =]-3, 1[$.
der Fall

Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen:
Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn man
- auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert (subtrahiert)
- beide Seiten mit derselben positiven Zahl multipliziert.

b)

$$-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \leq 0$$

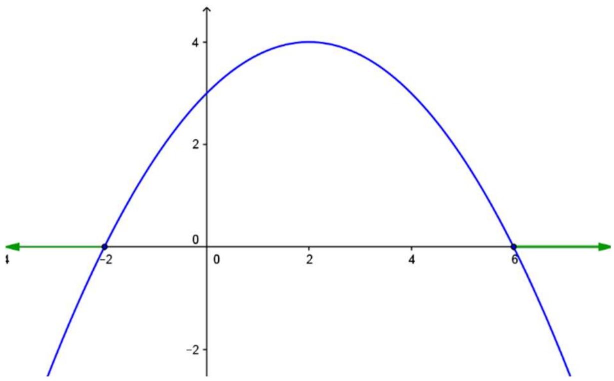
Der Graph der zugehörigen quadratischen Funktion

$f: x \rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$

ist eine nach unten geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen -2 und 6 schneidet.

Lösungsmenge:

$L\ =]-\infty\,, -2] \cup [6\,, +\infty[$



c)

$$\frac{x-2}{x+1} > 0 \qquad x \neq -1$$

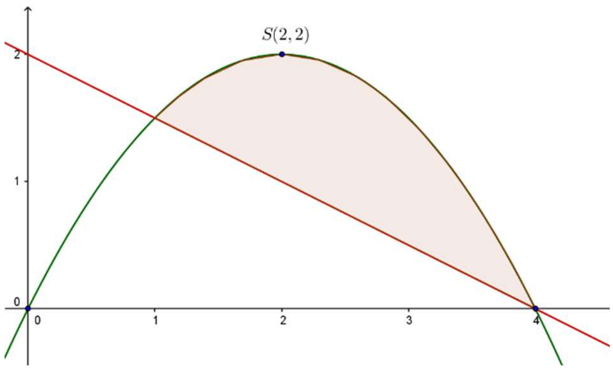
Eine Fallunterscheidung lässt sich vermeiden, indem man mit dem Quadrat des Nenners multipliziert.

Die neue Ungleichung $(x-2)(x+1) > 0$ hat die Lösungsmenge:

$L\ =]-\infty\,, -1[\cup [2\,, +\infty[$

Aufgabe:

Es ist die gefärbte Punktmenge in der Abbildung (ohne Rand) durch ein System von Ungleichungen zu beschreiben.



Da die Parabel die x-Achse an den Stellen x = 0 und x = 4 schneidet, kann ihre Gleichung in der Form $y = ax(x-4)$ angesetzt werden.

Der Scheitel S (2, 2) erfüllt die Parabelgleichung:

$2 = a \cdot 2 \cdot (-2)$ mit der Lösung $a = -\frac{1}{2}$

Gesuchtes Ungleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{c} y < \frac{1}{2}x(4-x) \\ y > 2 - \frac{1}{2}x \end{array} \right|$$