

12 Schnitt von Parabeln mit Geraden, Parabeltangente

Vorbereitende Aufgabe:

Für welchen Wert des Parameters q hat die quadratische Gleichung $x^2 + 6qx - q = 0$ genau eine Lösung?

Eine quadratische Gleichung hat genau dann eine einzige Lösung, wenn ihre Diskriminante den Wert 0 hat.

$$D = 36q^2 + 4q = 4q(9q - 1) = 0$$

$$q = 0 \quad x = 0 \text{ ist die einzige Lösung}$$

$$q = -\frac{1}{9} \quad x = \frac{1}{3} \text{ ist die einzige Lösung}$$

Aufgabe:

Es sind die Schnittpunkte der

Parabel $p: y = \frac{1}{4}x^2$ mit der

Geraden $g: y = \frac{3}{2}x + q$

für die folgenden Parameterwerte zu bestimmen:

$$\text{a) } q = -\frac{5}{4} \quad \text{b) } q = -\frac{9}{4} \quad \text{c) } q = -4$$

Die Koordinaten der gemeinsamen Punkte erfüllen sowohl die Geraden als auch die Parabelgleichung:

$$y: \frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{2}x + q \quad \text{oder} \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - q = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die

$$\text{Diskriminante } D = \frac{9}{4} + q.$$

a)

$$q = -\frac{5}{4} \quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} = 0 \quad D = 1 > 0$$

Die Gerade g schneidet die Parabel in zwei verschiedenen Punkten $S_1 \left(1, \frac{1}{4}\right)$ und $S_2 \left(5, \frac{25}{4}\right)$

b)

$$q = -\frac{9}{4} \quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 0 \quad D = 0$$

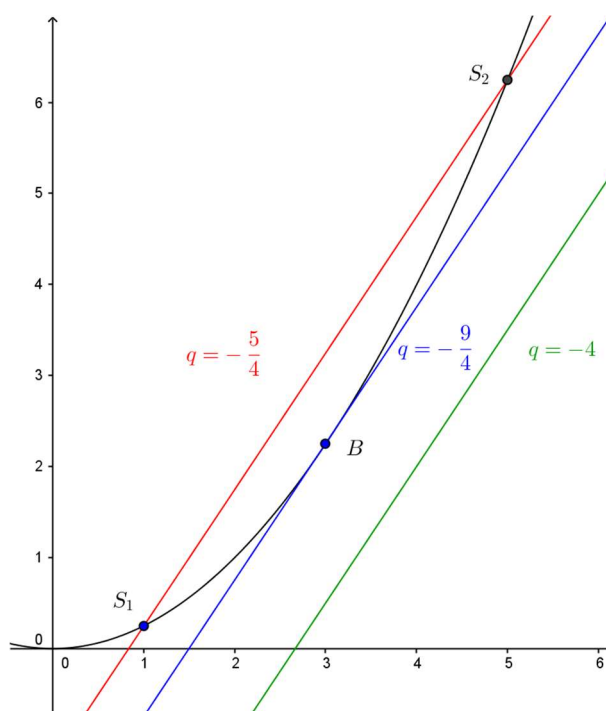
Die quadratische Gleichung $(x - 3)^2 = 0$ hat die Lösung $x = 3$

Die Gerade berührt die Parabel im Punkt $B \left(3, \frac{9}{4}\right)$. g ist die Parabeltangente im Punkt B .

c)

$$q = -4 \quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 4 = 0 \quad D = -\frac{7}{4} < 0$$

Die Gleichung hat keine reelle Lösung. Die Gerade meidet die Parabel.



Allgemein:

Das Problem, die Schnittpunkte einer quadratischen Parabel mit einer Geraden $g: y = mx + q$ zu schneiden, führt auf eine quadratische Gleichung mit der Diskriminante D . Es können damit die folgenden Fälle auftreten:

$D > 0$	Die Gerade schneidet die Parabel in zwei verschiedenen Punkten.
$D = 0$	Die Gerade berührt die Parabel, sie ist Tangente
$D < 0$	Die Gerade meidet die Parabel

Bemerkungen:

Eine entsprechende Aussage gilt auch für die Kegelschnitte Ellipse (insbesondere auch Kreis) und Hyperbel.

Auch im Ausnahmefall der Parabelachse ergibt sich genau ein Schnittpunkt.

Übungsaufgabe:

Wie lautet die Gleichung der Tangente t an die Parabel $p: y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3$, die zur Geraden $g: y = -2x$ parallel ist?

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = -2x + q$.

q ist so zu bestimmen, dass die Gleichung $-\frac{1}{2}x^2 - x + 3 = -2x + q$ oder $-\frac{1}{2}x^2 + x + 3 - q = 0$ genau eine Lösung hat.

Lösung: $q = \frac{7}{2}$, $B\left(1, -\frac{3}{2}\right)$

Die Steigung der Parabeltangente

Wählen wir das Koordinatensystem so, dass der Parabelscheitel im Ursprung liegt, dann kann jede quadratische Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ beschrieben werden.

Für die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden $g: y = mx + q$ gilt dann:

$$ax^2 - mx - q = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Diskriminante

$$D = m^2 - 4aq$$

Ist g Tangente, dann verschwindet die Diskriminante d.h. es gilt:

$$D = m^2 - 4aq = 0$$

Mit der quadratischen Auflösungsformel ergibt sich damit die x-Koordinate des Berührungspunkts zu

$$x_B = \frac{m}{2a}$$

Löst man diese Gleichung nach m auf, so erhält man für die Steigung der Parabeltangente den Wert

$$m = 2ax_B$$

Wird dieser Wert in die Diskriminante eingesetzt, so erhält man

$$m^2 - 4aq = (2ax_B)^2 - 4aq = 4a(ax_B^2 + q) = 0$$

und daraus wegen $a \neq 0$ den y-Achsenabschnitt q zu

$$q = -ax_B^2$$

Bemerkung:

Das Ergebnis $q = -ax_B^2$ bedeutet, dass die Scheiteltangente eine Parabeltangente halbiert.

Satz:

Die Tangente an die Parabel $y = ax^2$ hat im Parabelpunkt $P(x_B, y_B)$ die Gleichung $y = 2ax_B \cdot x - ax_B^2$

Das geometrische Problem in einem beliebigen Punkt die Tangente an eine Kurve zu bestimmen, wird in der später m Kapitel Analysis → **Differentialrechnung** gelöst.