

16 Ein Beispiel aus der Physik: Der schiefe Wurf

Ein Stein wird von einer um h erhöhten Plattform mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, wobei $v_x > 0$ ist geworfen (der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt). Nach welcher Zeit erreicht er den höchsten Punkt und wie gross ist die Scheitelhöhe?

Bewegungsgleichung für den schiefen Wurf ohne Luftwiderstand:

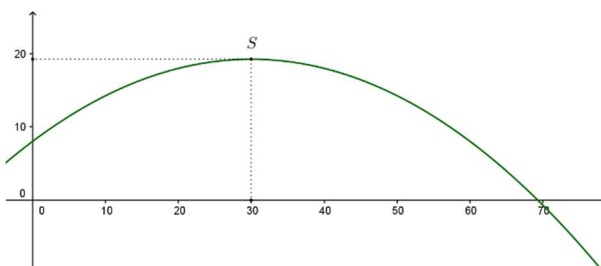
$$1) \quad x = v_x \cdot t$$

$$2) \quad y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + h \quad h > 0$$

Wegen 1) gilt: $t = \frac{x}{v_x}$ eingesetzt in 2)

Einsetzen in 2) führt auf:

$$y = v_y \cdot \frac{x}{v_x} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_x} \right)^2 + h = -\frac{g}{2v_x^2} \cdot x^2 + \frac{v_y}{v_x} \cdot x + h$$



numerisches Beispiel (vgl. die Abbildung):

$h = 8 \text{ m}$, $v_x = 20 \text{ m/s}$, $v_y = 15 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$3) \quad y = -\frac{1}{80} x^2 + \frac{3}{4} \cdot x + 8$$

Der Stein erreicht den höchsten Punkt S wegen $u = -\frac{b}{2a} = 30$ in 30 m horizontaler Entfernung, wegen 1) nach 1.5 Sekunden. Die Scheitelhöhe ergibt sich mit 3) und $x = 30$ zu 19.25 m, die erreichte Weite durch Lösen der quadratischen Gleichung $-\frac{1}{80} x^2 + \frac{3}{4} \cdot x + 8 = 0$ zu $69.2 \approx 70 \text{ m}$.

Im allgemeinen Fall mit $h = 0$, Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Abwurfwinkel α gilt:

$$4) \quad x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha.$$

$$5) \quad y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Löst man 4) nach t auf so erhält man:

$$6) \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

Setzt man diesen Term in 5) ein so erhält man die Gleichung der Bahnkurve (Wurfparabel):

$$3) \quad y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan \alpha$$

Die Wurfweite w kann mit folgender Überlegung bestimmt werden:

Für die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan \alpha = x \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x + \tan \alpha \right) = 0$$

gilt: $\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x = \tan \alpha$ oder

$$x = \tan \alpha \cdot \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \tan \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

und damit wegen $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin(2\alpha)$
zur Wurfweite w in horizontaler Richtung.

$$w = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$$

Setzt man w in Gleichung 6) ein, so erhält man für die zugehörige Wurfzeit T :

$$T = \frac{w}{v_0 \cdot \cos \alpha} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g \cdot v_0 \cdot \cos \alpha} = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

Die Scheitelhöhe h ergibt sich aus 5) als y -Wert zur Zeit $t = \frac{1}{2}T = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 = t \cdot \left(v_0 \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}g \cdot t \right) \\ &= \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \cdot \left(v_0 \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}g \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right) = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

zu

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

Bei gegebenem v_0 wird damit

w maximal für $\alpha = 45^\circ$

$$w = \frac{v_0^2}{g}$$

h maximal für $\alpha = 90^\circ$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

T maximal für $\alpha = 90^\circ$

$$T = \frac{2v_0}{g}$$